روجي غودمان
استاذ بكلية العلوم بباريس

دروس في الجبر

ترجمة
مختار عبيد
بمشاركة
أبوبكر خالد سعدالله
يوسف عتيق

المجلد الاول

ديوان المطبوعات الجامعية
الجزائر

دروس في الجبر

روجي غودمان
استاذ بكلية العلوم بباريس

دروس في الجبر

ترجمة
مختار عبيد
بمشاركة
أبوبكر خالد سعدالله
يوسف عتيق

المجلد الاول

دِيوَانُ المَطْبُوعَاتِ الجَامِعِيَّةِ - الجَزَائِر

© ديوان المطبوعات الجامعية : 11 - 87

Codification : 1 . 01 . 759

الفهرس

المجلد الاول

تمهيد

إن إدخال مفاهيم الجبر الحديثة والموسعة نسبياً ضمن برامج الرياضيات في كليات العلوم جعلنا بحاجة ماسة إلى كتابة مؤلف بالفرنسية يكون بمثابة مرجع للمبتدئين ؛ والكتاب الذي نقدمه هنا هو محاولة لسدّ هذا الفراغ ، وسنعرض الآن الأفكار الأساسية التي قادتنا عند كتابته .

إن هذا الكتاب يعتمد أساساً على الدروس التي أعطاها المؤلف بباريس والمتعلقة بشهادة الرياضيات العامة : الأمر الذي يجعل قراءته لا تتطلب سوى الإلمام بمواد التعليم الثانوي . وأضفنا في نفس الوقت بعض التتمات حتى يحوي الكتاب معظم برنامج الجبر في الليسانس .

وبذلك يكون من الممكن استعمال هذا الكتاب عدّة سنوات من طرف طلبة الرياضيات المجرّدة أو التطبيقية ، كما أنه يكاد يلم بكل ما تحتاجه الفيزياء الرياضية . ويمكن للقارئ ، بعد استيعاب محتوى هذا الكتاب ، يمكنه أن يدخل مباشرة في دراسات مختصة وجدية ، على أننا نأمل أن يكون ذلك ممكناً بالنسبة للقارئ العادي بعد سنة واحدة من دخوله كلية العلوم !

إن المواضيع التي ندرسها هنا هي تلك التي اتفق كل الناس اليوم على أنها ضرورية لمن سيكونوا رياضيين وفيزيائيين : المجموعات والتوابع ، الزمر ، الحلقات ، الحقول ، الأعداد العقدية ؛ الفراغات الشعاعية ، التطبيقات الخطية ، المصفوفات ؛ الفراغات الشعاعية المنتهية البعد ، جمل المعادلات الخطية ، دساتير كرامير ؛ كثيرات الحدود ، الكسور الناطقة ، المعادلات الجبرية ، اختصار المصفوفات . ويعبر اختيار المواضيع هذا عن تطور الرياضيات في النصف قرن الأخير ، وفكّرنا في ضرورة ترجمة هذا التطور باستعمال اسلوب كان مخصصاً في السابق للرياضيين المحترفين .

يعتقد كثير من الناس، وخاصة معظم أولئك الذين يكتفون باستخدام الرياضيات، أنه عندما نتوجه بكتَابتنا للمبتدئين فإنه من غير المفيد، بل من المضر، محاولة الالتزام بكثير من الدقة وبتقديم كل البراهين وبإدخال مفاهيم موسعة وباستخدام مصطلحات دقيقة التعريف ومجرّدة من الكلام المعسول. لو كان الحق بجانب هؤلاء، لكان هذا يعني، خلافاً لاعتقاد الرياضيين المحترفين وللرأي السليم، أنه كلما ساءت كتابة نص رياضي كلما ازداد فهمه من طرف المبتدئين. إن فقهاء اللغة اللاتينية يفهمون، بحكم مهنتهم، المنقوشات «المبتورة» التي تستخرج كل يوم من تحت التراب الايطالي، ولكن لم يخطر لحد الساعة على بال أي أستاذ في اللغة اللاتينية أن يستخدمها اثناء تدريس هذه اللغة للمبتدئين - إذ أنه من الأفضل اللجوء إلى قواعد نحوية جيدة الكتابة ... والأمر كذلك في ما يخص الرياضيات: فعندما نسعى إلى تفسير معنى تعريف مبهم؛ أو إلى تكملة برهان ناقص، أو إلى اكتشاف الأغراض الحقيقية لنظرية ما، فإنه من غير المعقول أن نأمل في أن تتوفر لدى المبتدئ نفس الفطنة والحدس اللذين يتمتع بهما المحترف.

ومن ناحية أخرى ينبغي أن نلاحظ بأن التقدم الذي سجل في ميدان الرياضيات منذ بداية هذا القرن يوفر إمكانية تجديد تعليم الرياضيات تجديداً جوهرياً، وذلك لمن يرغب في القيام بهذا التغيير. ويتم هذا إما بتقديم مفاهيم عامة بسيطة وحديثة تسمح بتوسيع نطاق الاستدلالات التقليدية توسيعاً معتبراً، وإما بوضع استدلالات تجعل بعض النتائج التي كانت تعتبر صعبة في الماضي، تجعلها سهلة الإدراك لدى المبتدئ. هذا وإن الرغبة في الدقة التي تمسّك بها دائماً كبار اخصائي نظرية الأعداد قد تبناها الآن، بشكل أو بآخر، بعض مؤلفي الكتب المدرسية إلى حد أن البعض منهم قد تجاوز بكثير جمهرة المحترفين أنفسهم...، وحدث ذلك بعد أن انتشرت نظرية الأعداد منذ ثلاثين سنة في كل فروع الرياضيات -. إن هذا التجديد والمبالغات التي تصحبه أحياناً، أثارت احتجاج المستعملين للرياضيات الذين يشعرون بالألم لما يطلب منهم من عناء حتى يفهموا كتب أبنائهم. وقد أعاب البعض على الرياضيين أنهم يبالغون في تقييم مساهماتهم عندما يحوّلون أنظار المبتدئ عن المسائل الأكثر صلة بالواقع. لا شك أن لهم بعض الحق في ذلك! لكن ماذا ينبغي أن نقول في هذه الحالة عن أخصائي «البحث الفضائي» مثلاً، الذين يرون طبيعياً المطالبة بأموال طائلة للتعرف

على كوكب الزهراء في الوقت الذي يرون فيهم مئات الملايين من البشر مهددين بالموت جوعاً؟ وأقلّ ما يقال عن الرياضيات في هذا المجال أنها قليلة التكاليف . . .

وينبغي أن نقول هنا أننا لا نوافق كثيراً من الشخصيات اللذين يطلبون اليوم من المدرّسين بصفة عامة والرياضيين بصفة خاصة أن يكوّنوا آلاف التقنيين اللذين نحن بحاجة إليهم ، كما يبدو للبعض ، حتى يمكن لنا البقاء ؛ وقد تحدث فكرتنا هذه شعوراً بالدهشة والرعب لدى البعض ، هذا الشعور الذي صوره «باولو أوسلّو»(*) بكل إتقان في «تدنيس القربان» . وبما أن الأمور هي على ما هي عليه ، وبما أننا نعيش في أمم «كبرى» كثيرة التطور علمياً وتقنياً ، فإنه من واجبنا نحن الرياضيين وغيرنا ، من واجبنا أن نقدم لهم ما لا يطلبون منا ، أي رجالاً قادرين على التفكير بأنفسهم وعلى اكتشاف الحُجج الخاطئة والعبارات الغامضة ، ويكون نشرهم للحقائق أكثر فاعلية من التلفزة الكونية الملونة : رجالاً أحراراً لا آلات في خدمة التقنوقراطيين . وإنه من المؤلم حقاً أن أجدى طريقة لتكوين هؤلاء الرجال لا تكمن في تعليمهم الرياضيات أو الفيزياء ، إذ أن هذين الفرعين العلميين يتظاهران بتجاهل تام للمسائل الإنسانية ، هذه المسائل التي تحضى ، وان يبدو ذلك غريباً ، باهتمام مجتمعاتنا ذات التطور الرفيع . وعلى الرغم من هذا فإنه بإمكاننا ، عند تدريس الرياضيات ، محاولة جعل الناس يتذوقون لذة الحرية والنقد ، وجعلهم يتعودون على الشعور بأنهم اناس متمتعين بقدرة الفهم .

لنرجع الآن للمبتدئين ؛ بما أن هذا الكتاب موجه لهم فإننا حاولنا مخاطبتهم بلغة الرياضيين المحترفين ، وذلك بتعريف كل العبارات الفنية وبإعطاء نصوص كل النظريات مع براهينها ، باستثناء البعض حتى نبقى في حدود معقولة .(**)

(*) رسّام إيطالي عاش في القرن الخامس عشر (للمترجم)

(**) إن أغلب النصوص غير المبرهنة توجد في الفصل 0 والفصول الخمس الموالية ؛ ولا يمكن طبعاً اعطاء المبتدئ نظرية المجموعات والمنطق الشكلي دون قبول عدد كبير من النتائج «البديهية» والهدف من الفصل 0 حول البراهين المنطقية هو الإشارة إلى أن «فلسفة الرياضيات» لا تقتصر حتماً على عبارات خالية من البنية ، زيادة عن كون الفصل المذكور يوضح للمبتدئ البراهين «المسموحة» والتي ليست كذلك (وهذا ضروري إذا نظرنا إلى أوراق الامتحان) .

ولقد حاولنا أيضاً إعطاء النظريات على أعمّ وجه ممكن، مع احترام قاعدة بديهية وهي اننا نضر بالمبتدئين إن نحن اعطيناهم تعميمات تعقّد براهين النصوص البسيطة، أو تعميمات غير قابلة لتطبيقات عملية. وهكذا، عند دراسة الجبر الخطي، وهي مسألة تنحصر عادة في دراسة الفضاءات الشعاعية الحقيقية والمنتهية البعد، فإننا اتخذنا وجهة نظر الفضاءات الشعاعية على حقل تبديلي كيفي، أو غير تبديلي إن لم تكن هناك فائدة في افتراضه تبديلي؛ وبالنسبة للمفاهيم البسيطة، تلك التي لا تستخدم سوى الجمع والضرب، فإننا قدمناها من أجل مقاييس على حلقة كيفية؛ وتلعب هذه المقاييس، في فروع الرياضيات، غير التحليل، تلعب دوراً لا يقل أهمية عن الدور الذي تلعبه الفضاءات الشعاعية، إذ أن مفهوم المقياس يظم مفاهيم أخرى ومن جملتها مفهوم الزمرة التبديلية. وهذا التعميم يعوّض ما نربحه من تبسيط للنص لو اقتصرنا على دراسة الفضاءات الشعاعية إذ أن التطور السريع للرياضيات قد حصل نتيجة لإمكانية التعرّف على نتائج عامة أكثر فأكثر، وذلك دون جهد إضافي، وهذا ما جعل الشباب يستطيعون الوصول إلى مستوى البحث بسرعة مماثلة لما كانت عليه منذ مائة عام، على الرغم من ضخامة الاكتشافات التي حصلت منذ ذلك التاريخ.

ينبغي على كل كتاب موجه للمبتدئين أن يحتوي على تمارين؛ ونجد مئات منها في هذا الكتاب، بعضها بسيط جداً والبعض الآخر أكثر صعوبة (وتوجد أمامها إشارة م)، وآخر موجه لمن له الشجاعة الكافية (وتوجد أمامها إشارة م م). ونجد تمارين عددية وتمارين متممة للنص تجعل القارئ يتصور بعض النظريات العميقة للجبر المعاصر، كما سمّي منذ ثلاثين سنة. ويمكن القول مسبقاً أن بعض النصوص خاطئة، إذ لا يوجد كتاب رياضي خال تماماً من الأخطاء، على أن النصوص الخاطئة تكون كثيرة الفائدة في بعض الأحيان.

وأخيراً، وعلى عكس العادة المتبعة في ما يتعلق بالمؤلفات الموجهه للمبتدئين، وجدنا ضرورياً تقديم عناوين مراجع تم اختيارها بكل عناية وأغلبها مؤلفات رياضيين كبار. ويبدو لنا مفيداً حصول القارئ على بعض هذه المراجع حتى يتعرف على إمكانية وجود وجهات نظر أخرى ويتعلم الاطلاع عليها. وأغلب هذه المراجع أجنبية، الأمر الذي قد يساعد كثيراً

من الشباب على التحرّر من بعض الأفكار القديمة التي جعلتهم يتأثرون بالدعاءات مغرضة، إذ أنه حتى لو تجاهلنا «الشعوب السفلى» التي يتحدث عنها أجدادنا، فإن الفرنسيين لا يمثلون سوى جزيرة صغيرة مؤلفة من خمسين مليون نسمة وسط محيط مؤلف من 700 مليون أبيض؛ وبما أن هؤلاء يذهبون إلى مدرسة منذ السادسة من عمرهم، ويبقى بعضهم بها أكثر مما نبقى، فإنه من الطبيعي أن نستنتج أن أهم المؤلفات بالرياضيات، مثلاً، لها حظ واحد على أربعة عشر أن تكون مكتوبة من طرف فرنسي؛ وهذا ما تثبته التجربة بالنسبة للجبر الابتدائي. إن هذا التذكير ضروري في وقت نرى فيه بعض الشباب متشبث بأفكار قومية ضيقة ومعادية لكل ما هو أجنبي، وإن كانوا غير مسؤولين عن مئات آلاف الجثث التي تثقل ضمائر آبائهم.

جويليه 1962

نظرية المجموعات

إن الهدف من الفصول ف 0 إلى ف 5 هو إدخال مفاهيم المجموعات والتوابع، وهي تجعل كل شيء ممكن في الرياضيات، وبدون هذه المفاهيم لا يمكن القيام بأي عمل في هذا الميدان. ولم تظهر هذه المفاهيم إلا في بداية القرن الحالي، ولم يتحدث أحد قبل ذلك عن المجموعات بصورة صريحة، أما مفهوم التوابع فكان يضم عدداً من الكائنات التي تفرض عليها بعض القيود الناتجة عن التطور التاريخي للرياضيات: الخواص الجبرية والتحليلية، قابلية الاشتقاق والاستمرار الخ...، التوابع ذات متغير واحد والتوابع ذات متغيرين والتوابع العقدية الخ... وكل هذه المفاهيم هي الآن حالات خاصة لنموذج وحيد يحتويها كلها ويعممها وهو نظرياً انسب منها. وانتشرت في نفس الوقت لغة نظرية المجموعات وأصبح استعمالها شرطاً أساسياً للوضوح والدقة (قد تتغير المصطلحات لكن تبقى المفاهيم الأساسية كما هي).

إن دراسة الفصول القادمة ضرورية لحد ما حتى يتمكن المرء من متابعة هذا الكتاب؛ ومن الآن نقول أن الفصل الأول والثاني والفقرة الأولى من الفصل الثالث لها أهمية خاصة. أما الفصل الرابع فيمكن للقارئ أن يؤجل دراسته الجدية حتى يكون بحاجة له؛ وفي ما يتعلق بالفصل الخامس فيمكن القول بأن أهميته ضعيفة إذا افترضنا أن القارئ يعلم مسبقاً الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة، على أن الفقرة السابعة من هذا الفصل كثيرة الاستعمال.

وفي ما يتعلق بالفصل صفر فهو مقدمة للمنطق الرياضي، وقد حاولنا اعطاء فكرة تقريبية للطريقة المتبعة من طرف الرياضيين عند انشاء ما يحتاجونه من كائنات، كما أننا جمعنا بعض الطرق الهامة للبراهين. وكما هو

الشأن بالنسبة للفصول الثلاث الأولى فإن الدراسة المدققة للفصل صفر غير مطلوبة من المبتدئ، إذ أن المفاهيم الموجودة هناك تستخدم كثيراً في ما بعد، الأمر الذي يمكن القارئ من التعود عليها، وبصورة سريعة في أغلب الأحيان.

وننصح القارئ المبتدئ ألا يخشى المظهر الحاد للفصول الأولى هذه، على الرغم من أنها تبدو له كثيرة التجريد. وأحسن نصيحة هي أن ينسى تماماً، وحتى اشعار آخر، كل الرياضيات التي تعلمها من قبل (وبالخصوص الهندسة الابتدائية التي لا مكان لها في هذا الكتاب ما عدى في ما يتعلق بمفهوم «التحويلات الهندسية» العام). وأنه من المفيد أيضاً أخذ العبارات التقنية بمعناها الحرفي.

ف ٥ . - الاستدلال المنطقي

1 - فكرة الكمال المنطقي

هناك ثلاثة وسائل أساسية في الرياضيات: إنشاء الكائنات الرياضية وتكوين علاقات بين هذه الكائنات والبرهان على أن بعض هذه العلاقات صادقة، أو، كما يقال، أنها نظريات.

إن الكائنات الرياضية هي الأعداد والتوابع والأشكال الهندسية وعدد لا يحصى من أشياء أخرى يهتم بها رجال الرياضيات: ولا توجد هذه الكائنات في الطبيعة، ولكنها صور مجردة لكائنات فيزيائية قد تكون معقدة ومرئية. إن العلاقات هي نصوص (صادقة أو كاذبة) يمكن اعطاؤها بالنسبة لهذه الكائنات، وهي متعلقة بخواص نفترضها محققة من أجل كائنات طبيعية تكون الكائنات الرياضية صوراً لها. أما العلاقات الصادقة فهي بالنسبة للرياضيين تلك التي يمكن الحصول عليها منطقياً انطلاقاً من مسلمات يتفق عليها من البداية. إن هذه المسلمات تعبّر بلغة رياضية الخواص البديهية للكائنات الملموسة التي نفكّر فيها؛

وقد تبدو التفسيرات هذه كثيرة الوضوح بالنسبة للقارئ المبتدئ، الاّ انها لم تعد كافية، منذ زمن طويل، لارضاء علماء الرياضة، وليس فقط لكون هؤلاء قليلي الميل للجمل السطحية؛ بل وبالخصوص لأن الرياضيات فرضت عليهم التفكير في أسس علمهم، وهذا ما جعلهم يعوضون العموميات بدساتير يمكن فهمها بدون أي التباس، وبذلك يصبح ممكناً أن نقرّر بصورة شبه آلية هل أن هذه الدساتير صحيحة أو كاذبة؛ وهل أنها تقبل معنى أم لا.

ومن الناحية التاريخية فإن ضرورة بناء الرياضيات على أسس صحيحة، قد ظهرت بمناسبة تطور «نظرية المجموعات» وبمناسبة إدخال مفاهيم «مجرّدة» جديدة مثل مفاهيم الحلقة والحقل والزمرة.

وبالنسبة لنظرية المجموعات، وقد كان كانتور مؤسساً لها حوالي سنة 1870، فقد لوحظ سريعاً أن الاعتماد على «الحدس الهندسي» عديم الفائدة إن لم نقل مضرًّا؛ وبعد حوالي عشرين سنة وجد الرياضيون أنفسهم أمام نتائج تبدو منافية للفكر السليم ولكنها مبرهنة بصورة دقيقة (على سبيل المثال، أثبت بيانو وجود منحني مستمر يمر بكل نقط مربع ما)، كما وجدت في نفس الوقت تناقضات داخلية سببها استعمال خاطئ لتعليلات ذكية يعتقد الرياضيون أنها من قبيل السفسطة مع أنهم لم يتوصلوا إلى إثبات ذلك. هذا وإن التناقضات الداخلية في الرياضيات هي الفظاعة بذاتها، إذ أن اليونانيون يعلمون منذ قرون أنه لو وجدت علاقة متناقضة (أي صادقة وكاذبة في آن واحد) فإنه من السهل أثبات أن كل العلاقات هي أيضاً متناقضة (أنظر الملاحظة 5 أسفله).

وفي نفس الفترة، أي من 1890 إلى 1910، تطورت أول نظريات «مجرّدة» كما يقال، وكان الهدف منها هو الحصول على نظرية عامة تضم كل النظريات الخاصة والمعروفة آنذاك، أو اعطاء أسس صلبة لنظريات أكل عليها الدهر وشرب من وجهة نظر منطقية (وأهم مثال للحالة الثانية هو ما قام به هلبرت من إعطاء أسس للهندسة الابتدائية؛ وكان ذلك أول نص دقيق للهندسة يعتمد أساساً على الاستنتاج المنطقي؛ حيث اعطيت نصوص كل المسلمات بصورة واضحة وبدون استثناء، مما يجعلنا نستطيع معرفة الشروط الضرورية بالنسبة لكل نظرية معرفة تامة؛ وستظل دراسة هلبرت هذه، وهي اتت عشرون قرناً بعد اليونانيين؛ ستظل نموذجاً لنصوص الرياضيات المعاصرة، وذلك لدقته في براهينه ولرفضه أي تنازل).

إن ما بذله الرياضيون من مجهودات في هذين الطريقين المرتبطين ببعضهما. إن ذلك عوّدهم على طلب الدقة المنطقية أكثر فأكثر، وعوّدهم على إعطاء براهين تتعلق بكائنات تبدو بعيدة أكثر فأكثر عن «الحقيقة» الملموسة وهذا ما يجعلنا نعتقد أن المهم في الرياضيات هي رموز تجمع مع بعضها حسب قوانين دقيقة وتجعلنا نستطيع إنشاء كائنات رياضية وعلاقات.

ونقبل اليوم نظرياً أنه يمكن كتابة كل الرياضيات بواسطة عدد صغير من الإشارات الأساسية (مثلاً : الإشارات التي تمثل العمليات المنطقية ، مع إشارتين أو ثلاثة متعلقة بالرياضيات - إشارة المساواة وإشارة الانتماء التي نتعرض لها في الفصل القادم وإشارة لإنشاء «أزواج» من الكائنات نتعرض لها أيضاً في الفصل القادم) ، مع عدد من الحروف غير محدود ؛ ومن وجهة النظر هذه ، تكون الكائنات الرياضية والعلاقات هي مجرّد جمع إشارات اساسية مع حروف (كثيراً ما تكون معقدة بحيث لا يمكن كتابتها) ، ويكون هذا الجمع وفق معايير تعطى في البداية (يمكن أن يجد القارئ إحدى قوائمها في الفقرة 9 من هذا الفصل) ويكون دور الإشارات الأساسية في هذه الحشود (أو الجموع) هو إعطاء كتابة رمزية لبعض العمليات الأولية ، منطقية كانت أو رياضية ، قد يؤدي تكرارها في حشد معين إلى عمليات أكثر تعقيداً ؛ أما الحروف التي تمثل كائنات رياضية غير معينة ، فهي تمكننا من إدخال مفهوم «درجات استقلال» الحشود المعتبرة ، أي إنشاء علاقات وكائنات متعلقة «بمتغيرات كيفية» .

وبعد أن يتم إنشاء قائمة الإشارات الأساسية وقائمة معايير تكوين الكائنات الرياضية والعلاقات ، فإنه ينبغي إعطاء نص المسلمات (وبعضها منطقياً بحتاً والبعض الآخر ذي طابع رياضي بأتم معنى الكلمة) .

وقد تم في الوقت الحاضر عزل معايير التكوين ، والمسلمات ، وإعطاء نصوص دقيقة تجعل من غير الخيالي فكرة إنشاء آلة تكتب الرياضيات وتعطي براهيناً للنظريات . ولو وجدت هذه الآلة فإن الرياضيات التي تكتبها تسمى «شكلية» ولا توجد إلا في فكر الرياضيين (وتعتمد كتابتها أساساً على قواعد تم الإتفاق عليها ، ولا تهمل أي مرحلة وإن كانت بديهية ، ولا تستخدم سوى الإشارات الأساسية والحروف بقطع النظر عن كل الرّموز المختصرة المألوفة) . ويبدو النص الرياضي الشكلي وكأنه محضر مقابلة في الشطرنج ، بدرجة أكثر تعقيداً ، ويعطي للقارئ إن فهمه فكرة عن «الكمال المنطقي» .

2. اللغة الحقيقية للرياضيات

إذا أردنا اعطاء كتابة شكلية للعدد 1 (وهو يبدو بسيطاً) فإننا نحصل على حشد مؤلف من عشرات آلاف الإشارات (إن عدد الإشارات الأساسية قليل، لكن قد يتكرر كل منها عدداً كبيراً من المرّات في حشد ما) . وإذا حاول الرياضي استعمال مثل هذه الحشود فإنه يكون مثل متسلق الجبال الذي ينظر للصخور بواسطة مجهر الكتروني حتى يختار نقط ارتكازه .

وهذا ما يدعونا عملياً إلى استخدام عدد كبير من المختصرات (منها الحرف اليوناني π، والإشارة +، وكلمات من اللغة المألوفة مثل «عدد» و «نقطة» و «مستقيم» و «تابع» الخ . . .) ، والهدف من ذلك هو إعطاء تمثيل بسيط لحشود معقدة ؛ وإذا قدّم الرياضي عدداً كافياً من مختصرات جموع اشارات أساسية، ومختصرات جموع مختصرات ومختصرات جموع مختصرات جموع إشارات أساسية وهلم جرّا، إذا قدّم ذلك فإنه يصبح بإمكانه الكف عن التفكير حول التعريف المدقق للكائنات التي أنشأها بهذه الطريقة ؛ ولا يبقى في فكره سوى الطريقة التي بواسطتها يستطيع أن ينتقل من مرحلة تعقيد إلى المرحلة التي تأتي قبلها مباشرة (وهذا هو المختصر بمعناه المألوف) ، ولا يحاول النزول بعد مراحل متتالية إلى اللغة الشكلية ؛ وكثيراً ما يحدث في نهاية المطاف أننا نستخدم في البراهين المختصرات التي قدمت، نستخدمها وكأنها إشارات بدائية مماثلة للإشارات الأساسية في اللغة الشكلية (وهكذا أدخل هلبرت في دراسة الهندسة ثلاثة مفاهيم بدائية - النقطة والمستقيم والمستوى - دون أن يحاول تعريفها، ومكتفياً بإعطاء قواعد استعمالها) .

ويتمتع الرياضي بقدرة في اختيار الحشود وتمثيلها بمختصرات ودراستها بصورة خاصة، الأمر الذي يجعل نشاطه يختلف عن نشاط الآلة . قد تعطي الآلة براهين بسرعة الضوء، لكنها تجمع النظريات بصورة عشوائية شبيهة بحركة براون . أما هدف الرياضيين على عكس ذلك فهو إعطاء براهين للنظريات «الهامة» وإعطاء حلول لمسائل مطروحة منذ عشرات السنين أو عشرات القرون في بعض الأحيان .(*) ولا يتعلق الأمر باختراع فروع رياضية

(*) إن مسألة «تربيع الدائرة» والمسائل المتعلقة بالأشكال الهندسية التي يمكن الحصول عليها بواسطة «المسطرة والفرجار» ، وهي مسائل مطروحة منذ عهد اليونان، قد وجدت حلولاً في القرن التاسع عشر . وقد طرح غولدباش افتراضه (حول إمكانية كتابة كل عدد طبيعي زوجي على شكل

جديدة ليست مرتبطة بالمسائل المطروحة ومجرّدة من الفائدة. وكانت دراسة هذه المسائل هي التي جعلت الرياضيين يكتشفون مفاهيم جديدة (أي مختصرات جديدة) وطرق جديدة قد تبدو للمبتدئ وللمستعمل وكأنها تبعدهما عن المسألة الأولى. وعلى سبيل المثال، عندما حاول كومر اعطاء برهان على «نظريص فارمات العظيمة» وإعطاء حلول لبعض المسائل الحسابية، فإنه وجد نفسه مضطرًا لإدخال مفهوم «الأعداد المثالية» في أواسط القرن الماضي؛ وقد أدى هذا المفهوم إلى اكتشاف «حلقات الأعداد الجبرية» و «مثاليات» هذه الحلقات حوالي سنة 1870 من طرف ديدكند؛ ومن ثم ظهرت المفاهيم «الجديدة» و «المجرّدة» للحلقة وللمثالي، وبدأت هذه المفاهيم تندمج مع الهندسة الجبرية؛ أما «نظرية فارمات العظيمة» فهي تقول أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \leq 3$ فإن «المنحني»

$$x^n + y^n = 1$$

لا يقبل أية نقطة ذات أحداثيات ناطقة، باستثناء تقاطعه مع محوري الإحداثيات، وتهتم الهندسة الجبرية في الواقع بمسائل من هذا النوع.

وبالإضافة لأمثلة أخرى لا يمكن ذكرها هنا، وعلى الرغم من اعتقاد بعض الهواة، فإن هذا المثال يشير إلى أن الرياضيين المحترفين يبحثون عن الطرق الأكثر طبيعية بحيث يتسنى لهم استخدام الحدس الهندسي والتحليلي والحسابي - إذ يوجد أيضاً حدس حسابي -.

مجموع عددين أوليين فرديين) في القرن الثامن عشر، ولم يتوصل الرياضيون إلى إعطاء حل لذلك حتى الآن، على الرغم من الخطوات الشاسعة التي قطعت في هذا الميدان منذ ثلاثين سنة. وفي القرن السابع عشر طرحت مسألة وارنغ: من أجل كل عدد طبيعي n، يوجد عدد طبيعي p بحيث يمكن كتابة كل عدد طبيعي على شكل مجموع مؤلف من p حداً، والحدود هي قوى نونية لأعداد طبيعية؛ وأبسط حالة هي لما يكون $n = 2$ و $p = 4$، وقد أعطى هلبرت حلاً لهذه المسألة في بداية هذا القرن. أما «نظرية فارمات العظيمة» وهي: إذا كان n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 3 فإن المعادلة

$$x^n + y^n = z^n$$

لا تقبل أي حل مؤلف من ثلاثة أعداد طبيعية z, y, x وموجبة تماما. ورغم أن هذه المسألة قد طرحت في بداية القرن السابع عشر فهي ما زالت بعيدة عن الحل، وقد تتطلب استخدام كل ما توصل اليه الجبر منذ قرن، بالاضافة إلى وسائل أخرى أقوى. ولم نذكر هنا سوى بعض المسائل ذات نصوص بسيطة يمكن فهمها من طرف القارئ المبتدئ.

وبما أن الرياضيين هم من لحم ودم، فإن نشاطاتهم تختلف عن نشاط الآلات في نقطة أخرى: إنهم لا يستطيعون التقيد التام بالدقة المنطقية المطلقة والتي تتقيد بها الآلات لو وجدت. وتحتوي النصوص الرياضية الجيدة، تحتوي عملياً على عدد كبير من «الثغرات» لو أستغني عنها لأصبح النص صعب القراءة. إن وجود هذه الهفوات المنطقية ليس خطراً إذ أن الكل يعتقدون اعتقاداً تاماً أنهم يستطيعون سدها لو أرادوا ذلك - ويحتمل في الواقع ألا يلاحظها القارئ المبتدئ -. ونعتبر اليوم أن النص الرياضي هو جيد الكتابة إذا توفرت به درجة من الدقة والوضوح مماثلة لتلك التي تتمتع بها نصوص الحساب الابتدائي، ويمكن كتابة معظم النصوص الرياضية على هذا النحو، ونتيجة لذلك فإننا لا نقبل اليوم بعض أصناف النصوص المزوقة التي سمحت لبعض الرياضيين منذ عهد قصير أن يصلوا إلى أكاديمية العلوم وإلى الأكاديمية الفرنسية.

أما الآن فسنحاول اعطاء القارئ معلومات أكثر دقة حول الطريقة المتبعة لإنشاء العلاقات وحول البراهين المنطقية الهامة. ونأمل ألا يعتقد القارئ المبتدئ أن الأعتبارات القادمة هي من اختصاص الفلاسفة وعلماء المنطق الرياضي؛ بل هي في الواقع قواعد للبرهان يستخدمها الرياضيون في كل لحظة. وتشير التجربة إلى أن المبتدئين يرتكبون أخطاء كبيرة عند استخدامها.

3. العمليات المنطقية الأولية

لقد قلنا في الفقرة الأولى أن العلاقات والكائنات الرياضية هي جموع حروف وإشارات أساسية. يتم تكوينها باعتبار بعض المعايير يمكن أن يتعرف عليها القارئ تدريجياً. وسنوجه اهتمامنا أولاً إلى الإشارتين الأكثر بساطة واللتين تسمحان بتكوين بعض العلاقات، كما سنهتم بالمختصرات التي يمكن التعبير عنها باستعمال الإشارتين المذكورتين فقط.

إن علماء المنطق يرمزون لهاتين الإشارتين بـ٧ و٦، أمّا نحن فنرمز لهما

بالـكلمتين «أو ، لا» المستعملتين كثيراً في الرياضيات. إذا كانت لدينا علاقتين R و S فإن الحشد

R أو S

الذي نحصل عليه بكتابة الحشد R ثم الإشارة أو ثم الحشد S ، يعرّف علاقة جديدة تسمى **بالفصل المنطقي** للعلاقتين R و S [وسنرى في ما بعد، عندما نكون قد عرّفنا العلاقات الصادقة ، أن العلاقة (R أو S) تكون صادقة إذا وإذا فقط كانت احدى العلاقتين R و S صادقة] . وإذا كانت لدينا علاقة R ، فإن الحشد

لا R

الذي نحصل عليه بكتابة الإشارة لا ثم الحشد R ، يعرّف أيضاً علاقة تدعى **نفي** العلاقة R [وسنرى في ما بعد أننا نقول عن علاقة أنها كاذبة إذا وإذا فقط كان نفيها صادقاً] .

وسنعطي في ما بعد قواعد استعمال هاتين الإشارتين ، وليس مفيداً حالياً طرح هذا النوع من الأسئلة .

إنطلاقاً من الإشارتين المذكورتين ، يمكن إدخال بعض المختصرات المستعملة كثيراً ، ويبدأ بالـكلمة

و ؛

إذا كانت لدينا علاقتين R و S فإن

R و S

هي بالتعريف العلاقة

لا [لا (R) أو لا (S)]،

وتدعى بِـ**الربط المنطقي** لِـR و S [وسنرى في ما بعد أن العلاقة (R و S) تكون صادقة إذا وإذا فقط كانت كلا R و S صادقتين] . ومن جهة أخرى ، فإن العلاقة

S أو (لا R)

تكتب

$$R \Rightarrow S$$

ونسميها **الاستلزام المنطقي**، ونقرءها(*): R تستلزم S [وسنرى في ما بعد أن صدق هذه العلاقة يعني أن S نتيجة منطقية لـ R (وبالتالي فهي صادقة إذا كانت R صادقة)؛ أما العلاقة $(R \Rightarrow S)$ فإنها قد تكون صادقة في حال عدم صدق R وعدم صدق S - وعلى سبيل المثال، فإن العلاقة

$$(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$$

علاقة صادقة، ونفس الشيء (في المنطق النازي) بالنسبة للعلاقة.

الشيوعيون حرقوا الرايشتاغ إذن يجب القضاء على الشيوعيين؛ إن هذا الاستنتاج، في المنطق النازي، صادق، لكن الجزء الأول كاذب].

أخيراً نرمز بِـ

$$R \Leftrightarrow S$$

للعلاقة

$$[(S \Rightarrow R) \text{ و } (R \Rightarrow S)]$$

ونسميها بِـ**التكافؤ المنطقي** ونقرءها: R تكافئ S.

سنرى في ما بعد معاييراً أخرى لإنشاء العلاقات.

(*) لن نقول، عملياً، «R تستلزم S»، إلا إذا كانت هذه العلاقة صادقة حسب المعنى الذي سنتعرض له. ونكتب في هذا الفصل علاقات ما دون اهتمام، في الوقت الحاضر على الأقل، بصدقها أو كذبها.

ونشير إلى أن كثيراً من الناس يستخدمون $\Rightarrow$ وكأنها كلمة «يستلزم»؛ ويرفض أغلب الرياضيين المحترفين هذه الطريقة إذ يفضلون الكتابة الكاملة للكلمة. هذا وإن الاستعمال المناسب للإشارة $\Rightarrow$ يطرح كثيراً من الصعوبة.

4. المسلّمات والنظريات

إن الإشارات التي قدّمناها في الفقرة السابقة تسمح لنا الآن بتعريف العلاقات **الصادقة** أو **النظريات**؛ وهي تلك التي يمكن الحصول عليها بتطبيق مكرّر للقاعدتين التاليتين:
(ع ص 1) : كل علاقة يحصل عليها بتطبيق مسلّمة هي صادقة
(ع ص 2) : إذا كانت لدينا علاقتين R و S، وإذا كانت العلاقة $R \Rightarrow S$ والعلاقة R صادقتين فإن العلاقة S صادقة.

أما **المسلمات**، فهي علاقات يعطى نهائياً نصها العلني، أو هي قواعد تدخل فيها علاقات «كيفية»، وإذا طبقت على علاقات معينة فإنها تؤدي إلى علاقات معينة (وبالتالي صادقة حسب تعريف هذه الكلمة)؛ إن المسلمات التي سنعطي نصها في الفقرة القادمة هي من الصنف الثاني.

نقول عن علاقة أنها كاذبة إذا كان نفيها صادقاً.

ملاحظة 1 - نرى مما سبق أن العلاقات الصادقة هي تلك التي يمكن تبريرها وليس تلك التي تسمح القوانين الطبيعية، مثلاً، بإعطاء تحقيق عمليّ لها، ويبدو هنا الفرق الأساسي بين الحقيقة الرياضية والحقيقة التجريبية. وانطلاقاً من الواقع اليومي، فإن المصلحة القصوى للمبتدئ، تتطلب منه أن يجعل ذلك نصب أعينه، على الأقل إذا كان يهتم فعلاً بالرياضيات.

ملاحظة 2.

من البديهي في الرياضيات أن معرفة صدق أو عدم صدق علاقة ما، تتعلق بجملة المسلمات المتفق عليها في البداية:
إذ يمكن لعلاقة صادقة في جملة معينة من المسلمات، يمكن لها أن تكون كاذبة في جملة أخرى، حتى لو كانت هذه الأخيرة تبدو «طبيعية» كالأولى. وعلى سبيل المثال فإنه تم إنشاء مسلمات حول نظرية المجموعات تكون فيها العلاقة «توجد مجموعات غير منتهية» علاقة كاذبة (- أي لا يمكن تبريرها - الأمر الذي يفسّر أن النص المذكور هو من المسلمات الأساسية في نظرية المجموعات المستعملة من طرف الرياضيين).

ونلاحظ من جهة أخرى أن علاقة كاذبة ما (أي لا يمكن تبريرها) ليست حتماً خاطئة: إذا كانت لدينا علاقة R ، فإنه قد يحدث أننا لا نستطيع تبريرها ولا نستطيع تبرير نفيها؛ ونقول عن العلاقات من هذا النوع أنها غير قابلة للبت (بالنسبة للمسلمات الموضوعة في النظرية المعتبرة). وقد أثبت أخيراً وجود علاقات من هذا النوع في الرياضيات المألوفة (أنظر نهاية ف 5، رقم 5) المبنية على المسلمات المذكورة في ف 0 وف 1 وف 2. وإذا كانت R علاقة من هذا النوع فإنه يمكن «إكمال» الرياضيات بإضافة R أو لا R إلى قائمة المسلمات.

ملاحظة 3. بالإضافة إلى العلاقات الصادقة والعلاقات الكاذبة فإنه ينبغي علينا أن نعتبر، من حيث المبدأ، العلاقات المتناقضة، أي الصادقة والكاذبة في نفس الوقت. ويأمل الجميع أن تكون المسلمات الأساسية منسجمة مع بعضها - أي تمنع حدوث علاقات متناقضة - ولكن لم يفلح أحد في تبرير ذلك لحد الآن. وإذا وجدت علاقات متناقضة فإنه ينبغي التخلي عن بعض المسلمات أو إضعافها.

5. المسلمات المنطقية والتكراريات

لم نعط لحد الآن نص أية مسلمة؛ وسنعطي في هذه الفقرة نصوص أبسطها، والتي ترمي إلى تبرير البراهين المنطقية الأولية (التطابق المنطقي، النفي المكرر، الخ...)؛ إن عدد هذه المسلمات هو أربعة، إلا أنه من الخطإ أن يعتقد القارئ أن الطريقة التي نتبعها هنا وحيدة: إذ توجد إمكانيات أخرى لاستنتاج البراهين المنطقية الأولية انطلاقاً من عدد صغير من المسلمات البسيطة.

(م م 1) : إذا كانت لدينا علاقة R ، فإن

$$(R \text{ أو } R) \Rightarrow R$$

علاقة صادقة.

وبالتالي، حسب القاعدة (ع ص 2) بالفقرة السابقة، إذا كانت العلاقة (R أو R) صادقة، فإن R صادقة.

(م م 2) : إذا كان لدينا علاقتين R و S، فإن

$$R \Rightarrow (S \text{ أو } R)$$

علاقة صادقة.

وبالتالي، إذا كانت R صادقة، فإن (R أو S) صادقة. انسجاماً مع المعنى الحدسي لكلمة «أو».

(م م 3) : إذا كان لدينا علاقتين R و S فإن

$$(S \text{ أو } R) \Rightarrow (R \text{ أو } S)$$

علاقة صادقة.

ونرى، باستعمال المسلمتين السابقتين معاً، أنه إذا كانت R صادقة فإن (S أو R) تكون أيضاً صادقة، أو، أنه إذا كانت S صادقة فإن (R أو S) صادقة؛ وبما أننا أثبتنا من قبل أنه إذا كانت R صادقة فإن (R أو S) صادقة، نرى أن (R أو S) تكون صادقة بمجرّد صدق R أو صدق S.

(م م 4) : إذا كان لدينا ثلاثة علاقات R و S و T، فإن

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow ((T \text{ أو } R) \Rightarrow (T \text{ أو } S))$$

علاقة صادقة.

وبالتالي، إذا كانت R تستلزم S، أي إذا كانت ($R \Rightarrow S$) صادقة، فإن العلاقة (R أو T) تستلزم العلاقة (S أو T). وقد يبدو هذا النوع من النصوص بديهياً للقارئ المبتدئ - ولكن هذا لا يمنع استخلاص نتائج ملموسة منها. وفي الواقع ينبغي أن تعتبر المسلمات الأربع السابقة وكأنها قواعد عمل آلية للإشارتين «أو» و «لا»، ولا ينبغي اعتبارها بالتالي اكتشافات ميتافيزيائية عميقة.

إن النظريات التي يمكن تبريرها باستعمال المسلمات السابقة وحدها تدعى

تكراريات (أو قضايا تكرارية) ؛ وهي تلك التي يستعملها الرياضيون في براهينهم المنطقية ، دون إشارة علنية لها في أغلب الأحيان. ونقدّم بعضها في ما يلي ؛ ولن نبرهن عليها كلياً.

(ت م 1) : إذا كانت R و S و T ثلاثة علاقات ، وإذا كانت $(R \Rightarrow S)$ وإذا كانت $(S \Rightarrow T)$ صادقتين ، فإن $R \Rightarrow T$ صادقة.

وعلى سبيل المثال ، نأخذ الآن البرهان على ذلك. لنطبق (م م 4) حيث نعوض R و S و T بـ S و T و (لا R) على الترتيب ؛ نرى أن

$$(S \Rightarrow t) \Rightarrow [((\text{لا } R) \text{ أو } S) \Rightarrow ((\text{لا } R) \text{ أو } T)]$$

علاقة صادقة ؛ وحسب تعريف الإشارة $\Rightarrow$ ، فإن ذلك يعني صدق العلاقة

$$(S \Rightarrow T) \Rightarrow [(R \Rightarrow S) \Rightarrow (R \Rightarrow T)] ;$$

وحسب ما افترضناه ، فإن $(S \Rightarrow T)$ علاقة صادقة ؛ وبالتالي تشير القاعدة (ع م 2) إلى صدق العلاقة

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow (R \Rightarrow T) ;$$

وبما أن $(R \Rightarrow S)$ صادقة افتراضاً ، فإننا نرى صدق $(R \Rightarrow T)$ بتطبيق (ع ص 2) من جديد ، وبذلك ينتهي البرهان.

(ت م 2) : إذا كانت لدينا علاقة R ، فإن $(R \Rightarrow R)$ علاقة صادقة. بالفعل ، إن

$$R \Rightarrow (R \text{ أو } R) \quad ، \quad (R \text{ أو } R) \Rightarrow R$$

علاقتان صادقتان حسب (م م 1) و (م م 2) ؛ يبقى عندئذٍ تطبيق (ت م 1).

ملاحظة 4. نظراً لتعريف الإشارة $\Rightarrow$ ، فإن النص السابق يعني صدق العلاقة

$$R \text{ أو } (\text{لا } R)$$

مهما كانت العلاقة R . ولا ينتج عن ذلك أن إحدى العلاقتين على الأقل، R أو (لا R) ، صادقة - **وهذه هي بالتحديد مسألة وجود علاقات غير قابلة للبت!** وفي الواقع، إذا أثبتنا صدق علاقة من النوع (R أو S)، فإننا لا يمكن أن نستنتج مباشرة صدق R أو صدق S.

(ت م 3) : إذا كانت لدينا علاقة R ، فإن

لا (لا R) $\Leftrightarrow R$

علاقة صادقة.

وبالتالي، فإن قولنا أن R صادقة يعني أن نفي (لا R) صادق، وبتعبير آخر، أن (لا R) كاذبة.

(ت م 4) : إذا كانت لدينا علاقتين R و S ، فإن

$(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow$ [(لا S) $\Rightarrow$ (لا R)]

علاقة صادقة.

وهكذا، إذا أردنا إثبات أن R تستلزم S ، فإنه يكفي (ويلزم) إثبات أن نفي S يستلزم نفي R . أما النص

$(R \Rightarrow S) \Rightarrow$ [(لا R) $\Rightarrow$ (لا S)]

فهو غير صحيح، ومصدر لكثير من الأخطاء في البراهين (بما أن كل إنسان فان، نستطيع بواسطة هذا النص إثبات أن كل كلب خالد، لو كانت العلاقة السابقة صادقة) . ومع ذلك فإننا كثيراً ما نستعمل هذه العلاقة في حياتنا اليومية، وأغلب الأحيان على غير صواب، وعلى حق في بعض الأحيان من الناحية النفسية: «إن اليمينيين يدافعون عن الجزائر فرنسية، وبالتالي فإن اليساريين يدافعون عن الجزائر الحرّة» .

(ت م 5) : إذا كان لدينا علاقتين R و S ، فإن

(R و S) $\Rightarrow R$ ، (R أو S) $\Rightarrow S$

علاقتان صادقتان؛ وإذا كان، بالإضافة إلى ذلك، لدينا صدق R وصدق S فإن (R و S) تكون صادقة.

وينتج عن ذلك أن (R و S) تكون صادقة إذا وإذا فقط كانت كلا العلاقتين R و S صادقة، مما ينسجم مع المعنى الحدسي لكلمة «و».

ملاحظة 5. يمكن أن نثبت بسهولة أنه لو وجدت علاقة R متناقضة فإن كل علاقة أخرى تكون متناقضة، كما سبق أن أشرنا إلى ذلك.

بالفعل، إذا كانت لدينا علاقة R متناقضة و S علاقة ما، فإن (م م 2) و (م م 3) تشيران إلى صدق

(S أو (لا R)) ⇒ (لا R)؛

وبما أن (لا R) صادقة فرضاً، فإن

S أو (لا R)، أي ($S \Rightarrow R$)،

علاقة صادقة؛ وبما أن R صادقة فرضاً، فإننا نستنتج أن S صادقة - وبالتالي (لا S) أيضاً...

إن الملاحظة السابقة أساس **للبرهان بطريقة التناقض**؛ وينص ذلك، إذا أردنا إثبات صدق علاقة R، على إضافة مؤقتة لِـ (لا R) ضمن مسلمات الرياضيات، ثم إثبات تناقض الرياضيات «الجديدة» التي نحصل عليها عندئذٍ؛ وحسب الملاحظة 5، فإن كل علاقة تصبح صادقة بالنسبة للجملة الجديدة، ومن ضمنها R ذاتها. وتكون R بالتالي نتيجة منطقية للمسلمات (المألوفة) وللعلاقة (لا R)، وهذا يعني، كما نرى بسهولة، أن

$R \Leftarrow$ (لا R)

علاقة صادقة (في الرياضيات المألوفة التي عدنا إليها)؛ بقي أن نستنتج من ذلك صدق R ذاتها؛ فإذا عوضنا R و S و T بـ (لا R) و R و R، على الترتيب، في (م م 4)، فإننا نحصل على صدق العلاقة

[(R أو R) ⇒ ((لا R) أو R)] ⇒ (R ⇒ (لا R))؛

وبما أن (R ⇒ (لا R)) صادقة فرضاً، فإن

(R أو R) ⇒ ((لا R) أو R)

صادقة أيضاً ؛ لكن ((لا R) أو R) صادقة حسب (م م 3) وملاحظة 4 ؛ ومنه نرى صدق (R أو R)، بالتالي صدق R حسب (م م 1).

إن البرهان بطريقة التناقض يستعمل عملياً على النحو التالي: «نفترض كذب العلاقة R»، وهذا يعني إضافة (لا R) ضمن مسلمات الرياضيات ؛ ونواصل البرهان، إنطلاقاً من ذلك، حتى نحصل على علاقة صادقة وكاذبة في آن واحد ؛ ونختم بقولنا «لكن هذا تناقض، وبالتالي فإن R صادقة».

هناك طريقة أخرى كثيرة الاستعمال، وهي طريقة **فصل الحالات** ؛ وتعتمد على النص التالي:

(ت م 6) : إذا كان لدينا ثلاثة علاقات R و S و T، وإذا كانت

$$(R \text{ أو } S) \text{ ، } (R \Rightarrow T) \text{ ، } S \Rightarrow T$$

ثلاثة علاقات صادقة، فإن T صادقة.

بما أن S تستلزم T، فإن (م م 4) تشير إلى أن (S أو R) تستلزم (T أو R) ؛ وبما أن R تستلزم T، فإننا نرى أيضاً أن (R أو T) تستلزم (T أو T) ؛ وبما أن (T أو R) تستلزم (R أو T) حسب (م م 3)، فإننا نرى بالتالي أن (S أو R) تستلزم (T أو T) ؛ لكن (R أو S) صادقة وتستلزم (S أو R)، وبالتالي فإن (T أو T) صادقة، ونختم البرهان بواسطة (م م 1).

نستخدم عملياً النص السابق على النحو التالي: S هي نفي R ؛ ولإثبات صدق T، فإنه ينبغي إثبات أن R تستلزم T، وأن (لا R) تستلزم T أيضاً.

6. التعويضات في علاقة ما.

نعتبر علاقة R وكائناً رياضياً A وحرفا x (وهو بالتالي كائن رياضي «معين تماماً») ؛ نعوض الحرف x بِـ A أينما وجد x في الحشد المؤلف من

الحروف والإشارات الأساسية والذي يعبّر عن العلاقة R ؛ إن أحد معايير تكوين العلاقات هو أن الحشد الناتج يعرَف علاقة أيضاً، نرمز لها(*) بالإشارة

$$(A/x)R ،$$

والتي تسمّى : **العلاقة الناتجة عن تعويض A مكان x في R** ، أو **إعطاء قيمة A لـ x في R** ؛ ونقول عن الكائن الرياضي A أنه **يحقق العلاقة R** إذا كانت $(A/x)R$ علاقة صادقة؛ ومن البديهي أنه إذا كان x غير موجود فعلاً في R ، فإن العلاقة $(A/x)R$ هي R ذاته ، وقولنا في هذه الحالة أن A يحقق R يعني أن R صادقة.

وإذا أردنا أن نعبر عن وجود الحرف x ضمن العلاقة R فإننا عادة نكتب العلاقة على النحو

$$R\{x\}$$

(وهي كتابة مماثلة لتلك التي سنستعملها في ف 2 لتعيين التوابع ، مع العلم أن الكتابتين غير متطابقتين) ؛ وكثير ما نكتب

$$R\{A\}$$

عوضاً عن $(A/x)R$. كما أنه لو وجد في R حرفان مختلفان x و y ، وإذا أردنا أن نوضح ذلك فإننا نكتب

$$R\{x, y\}$$

عوضاً عن R ، وهلم جرّا.

(ت م 7) : لتكن لدينا علاقة R وحرفا x وكائناً رياضياً A . إذا كانت R صادقة فإن العلاقة الناتجة عن تعويض A مكان x في R صادقة أيضاً.

وبتعبير آخر ، إذا كانت R صادقة عندما نعتبر x «كائناً غير معين» فيها ، فإنها تضل صادقة عندما نعطي x «قيمة» محدّدة A . وعلى سبيل المثال ، لو أثبتنا صدق العلاقة

$$x = x ،$$

(*) في هذا الفصل فقط.

حيث x هو حرف بالمعنى الفني للكلمة، فإنه ينتج صدق العلاقة

$$A = A$$

مهما كان الكائن الرياضي A.

قد تبدو هذه النتيجة للقارئ المبتدئ وكأنها تلاعباً بالالفاض، نظراً للمعنى الحدسي المعطى للحروف في وقت سابق، والذي **يجعل الحروف تمثل كائنات «غير معينة تماماً» أو «كيفية»؛ غير أن هذا التأويل لا يستند إلى أي نتيجة رياضية محدّدة**، ولم يتم بعد تبريره بقواعد تحكم استعمال الحروف وتنسجم مع ما يفهمه الرأي العام حول سلوك الكائنات «الغير محددة». إن القاعدة (ت م 7) تهدف بالتحديد إعطاء تبرير لإمكانية اعتبار الحروف وكأنها تمثل «كائنات غير محددة»، وإذا اعتقد القارئ أنه يمكن تبرير (ت م 7) باعتبارات متعلقة «بالمفهوم السليم»، فإن ذلك يعني عدم فهمه لب المسألة: إن الآلات القادرة على البرهان تجهل هذا المفهوم، وكل محاولة لإفهامها معنى «كائن غير محدد» تعتبر إضاعة للوقت.

ويكون البرهان في الواقع على النحو التالي: نتحقق أولاً من صدق (ت م 7) عندما تكون R ناتجة مباشرة عن مسلمة؛ ونرى في هذه الحالة أن العلاقة $(A/x)R$ تتطابق مع R، أو أنها نتيجة مباشرة للمسلمة التي اعطت R - إذا كانت، مثلاً، R هي

$$(S \text{ أو } S) \Rightarrow S$$

حيث S علاقة معطاة، فإنه من الواضح أن $(A/x)R$ هي

$$(S' \text{ أو } S') \Rightarrow S'$$

حيث S' هي تعيين للعلاقة $(A/x)R$. وبعد القيام بكل التحقيقيات التي تفترض كتابة كل المسلمات، فإنه يصبح يسيراً الانتقال إلى الحالة العامة بالنسبة لعلاقة «كيفية».

7 - المكممات

لقد أعطينا لحد الآن ثلاث طرق أساسية لتكوين العلاقات: الفصل المنطقي والنفي وتعويض حرف بكائن. إن لهذه الطرق صبغة منطقية بحتة (أي لا تدخل فيها الإشارات الرياضية التي نقدّمها في الفصلين 1 و 2). ونحتاج عملياً إلى طريقة منطقية رابعة لتكوين العلاقات، وهي تلك التي تعبر عن الحالة التالية: إذا كانت لدينا علاقة R وحرفاً x فإنه يوجد على الأقل كائن رياضي A بحيث تصدق العلاقة $(A/x)R$، أي أن A يحقق R.

ومن البديهي أن عبارة «يوجد» هي بمعناها الحدسي البحت؛ والهدف من الاعتبارات القادمة هو تعويضها بإشارة منطقية هي

$\exists$ ،

وإعطاء قواعد استعمالها بطريقة منسجمة مع المعنى المألوف لعبارة «يوجد». إن الإشارة $\exists$ تدعى: **المكمم الوجودي**.

إذا كان لدينا علاقة R وحرفا x، فإنه بإمكاننا إنشاء علاقة جديدة، نرمز لها بـ

$(\exists x)R$ أو $(\exists x)\ R\{x\}$

ونقرءها(*)

يوجد x بحيث R.

وإذا أردنا مثلاً أن نكتب في هذه اللغة أن المعادلة $x^4 + 1 = 0$ تقبل جذراً حقيقياً على الأقل (وهذا خطأ، لكن دون أهمية)، فإننا نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بـ**R**، ونستعمل الإشارة $\in$ التي سنقدمها في الفصل القادم، ونحصل بذلك على العلاقة

$(\exists\ x)(x \in \mathbf{R})$ و $(x^4 + 1 = 0)$.

(*) أنه لمن الصعب الاستعمال الصحيح للإشارتين $\exists$ و $\forall$؛ وعليه فمن الأنسب كتابة «يوجد» و «مهما كان»، كما فعلنا دائماً.

وانطلاقاً من الإشـارة ∃، ندخل المختصر

$\forall$،

والذي نسمّيه : المكمم الكلي؛ إذا كانت لدينا علاقة R وحرفا x فإننا نرمز بِـ

$$(\forall x)\, R$$

للعلاقة

$$\text{لا}\, [(\exists x)\,(R\ \text{لا})]$$

ونقرءها(*)
من أجل كل x، R
أو
لدينا R مهما كان x

وقولنا بأن $((\forall x)\ R)$ كاذبة يعني بالتالي أن النص $((\exists x)(R\ \text{لا}))$ صـادق : إن النص «يوجد رجال خالدون» هو نفي منطقي للنص «كل رجل فان» . بيد أن كذب النص «كل سكان القصبة بالجزائر ذاقو التعذيب سنة 1957» لا يعني طبعاً صدق «لم يعذّب أي شخص من سكان القصبة سنة 1957» .(**)

ملاحظة 6. يمكن لنا، من الناحية النظرية، كتابة الرياضيات مستعملين فقط الحروف، والإشـارات المنطقية الثلاث

أو ، لا ، ∃

والإشـارات الرياضية الثلاث التي تساعدنا على تكوين «المسـاواة» و «الانتماء» و «الأزواج»، والتي نتعرض لها في ف 1 و ف 2 (وبإمكاننا في الواقع الاستغناء عن إشـارة «الأزواج») .

(**) يمكن للقارئ الراغب في الإطلاع على هذا الموضوع، أن ينظر إلى المعلومات المجموعة في كتاب La Raison d'Etat للمؤلف Pierre Vidal – Naquet (منشورات Minuit, Paris 1962)، حيث يجد أيضاً مراجع متعدّدة.

وفي ما يخص مفاخر البوليس الجزائري، آنذاك، يمكن الاطلاع على La question ininterrompue، الصـادرة في جريدة Le Monde، عدد 29/9/1965، لنفس المؤلف.

وفي هذه الجملة، قد تصدق علاقة من النوع $(\exists x) R$ دون أن تكون لدينا وسيلة عملية لإنشاء كائن رياضي «فعلي» يحقق R - كما أن قولنا في الحياة اليومية «يوجد رجال بنوك شرفاء» لا يسمح بإيجاد رجل من هذا النوع. نتعرض في الفقرة 9 إلى جملة أكثر كمالاً، لا يحدث فيها ما سبق، وإن كانت مصطنعة نوعاً ما.

8 قواعد استعمال المكممات

إن القاعدة الأولى هي:

(م م ٥): إذا كان لدينا علاقة R وحرفا x وكائنا رياضيا A فإن

$$(A/x) R \Rightarrow (\exists x) R$$

علاقة صادقة.

وهكذا، إذا كانت $(A/x)R$ صادقة، أي إذا كان A «يحقق» R، فإن $(\exists x) R$ صادقة، وهذا ينسجم مع ما نرجوه. وهذه هي الطريقة التي نتبعها في كل الحالات العملية تقريباً عندما نريد إثبات صدق علاقة من النوع $(\exists x) R$: نظهر كائناً معيناً A يحقق R.
وهذا ما نفعله في حياتنا اليومية: إن أحسن طريقة لإثبات وجود رجال بنوك شرفاء هي إظهار أحدهم بصورة علنية.

(ت م 8): إذا كان لدينا علاقة R وحرفا x وكائناً رياضياً A، فإن

$$(\forall x) R \Rightarrow (A/x) R$$

علاقة صادقة.

وهكذا، إذا كانت $(\forall x) R$ صادقة، فإننا نحصل على علاقة صادقة جديدة إذا عوّضنا x في R بكائن رياضي كيفي. إذا أثبتنا مثلاً صدق العلاقة

$$\forall x\, (x = x) ،$$

حيث x هو حرف بالمعنى الفني للكلمة، فإن العلاقة

$$A = A$$

تكون صادقة مهما كان الكائن الرياضي A. وهذا ما نفعله أيضاً في حياتنا اليومية: إن النص «كل رجال الفكر شاذون جنسياً» يستلزم أن كل رجل فكر، حيث يعطى اسمه علنياً، هو شاذ جنسياً.

(ت م 9): إذا كانت لدينا علاقة R وحرفا x، فإن

$$((\exists x)R)\text{لا} \Leftrightarrow (\forall x)(R\ \text{لا})$$

علاقة صادقة.

إن كذب العلاقة $R(x\,\exists)$، يعني بالتالي صدق $(\text{لا}\ R)(x\,\forall)$، وينتج عن ذلك بصفة خاصة أن كل كائن رياضي A يحقق $(\text{لا}\ R)$.

(ت م 10): إذا كانت لدينا علاقتين R و S، وحرفا x، فإن

$$(\forall x)(S\ \text{و}\ R) \Leftrightarrow ((\forall x)S\ \text{و}\ (\forall x)R)$$

علاقة صادقة.

وهذا بديهي من وجهة نظر حدسية. وعلى العكس من ذلك فإننا نشير إلى أن العلاقة

$$(\forall x)\ (S\ \text{أو}\ R) \Leftrightarrow ((\forall x)S\ \text{أو}\ (\forall x)R)$$

ليست دوماً صادقة؛

(ت م 11): إذا كانت لدينا علاقتين R و S، وحرفا x فإن

$$(\exists x)(S\ \text{أو}\ R) \Leftrightarrow ((\exists x)S\ \text{أو}\ (\exists x)R)$$

علاقة صادقة.

وهذا أيضاً واضح من الناحية الحدسية. ونشير من جهة أخرى إلى أن

$$(\exists x)(S\ \text{و}\ R) \Rightarrow ((\exists x)S\ \text{و}\ (\exists x)R)$$

علاقة صادقة، بيد أن الاستلزام العكسي كاذب بصفة عامة.

وهكذا فإن النص «يوجد رجال أغنياء وشرفاء» يستلزم بصورة واضحة النص: «يوجد رجال أغنياء ويوجد رجال شرفاء»، بيد أن الاستلزام العكسي غير صحيح، إذ أن المبرّرات المنطقية البحتة لا تكفي لاقصاء إمكانية وجود رجال أغنياء وغير شرفاء.

ونعطي في الختام بعض القواعد التي تسمح بتكرار المكمات. لنعتبر علاقة R، وحرفين x و y مختلفين؛ نستطيع عندئذ أن نطبق في R، مكمًا على x، ثم في العلاقة الناتجة نطبق مكمًا بالنسبة للحرف y؛ كما يمكننا بطبيعة الحال القيام بالعملية المذكورة بصورة عكسية، وهذا ما يدعو إلى طرح السؤال التالي: هل هناك أهمية في الترتيب الذي نتبعه عند إجراء هذه العمليات؟ إن الإجابة عن هذا السؤال معطاة في النص القادم (وهو لا يضم سوى أكثر الحالات استعمالاً):

(ت م 12): إذا كانت لدينا علاقة R، وحرفين x و y مختلفين فإن

$$(\forall x)(\forall y) R \Leftrightarrow (\forall x) R$$

و

$$(\exists x)(\exists y) R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) R$$

و

$$(\exists x)(\forall y) R \Rightarrow (\forall y)(\exists x) R$$

هي علاقات صادقة.

لنعطِ مثلاً تبريراً حدسياً (وبالتالي غير كاف) للنص الثاني. إذا صدقت العلاقة $(\exists x)(\exists y) R$، فإن هذا يعني وجود كائن A إذا عوّضناه مكان x في العلاقة $(\exists y) R$ فإننا نحصل على علاقة صادقة - وبتعبير آخر، حيث تصدق العلاقة $(\exists y)\ R\{A, y\}$؛ وهذا يعني أيضاً وجود كائن B إذا وضع مكان y في $R\{A, y\}$. فإننا نحصل على علاقة صادقة - أي بحيث تصدق $R\{A, B\}$. ولكن عندئذٍ تصدق العلاقة $(\exists y)(\exists x)\ R\{x, y\}$، وهو ما نريد «إثباته».

ملاحظة 7. توجد على الأقل ثلاثة أخطاء في البرهان السابق: (1) لقد اكتفينا بإثبات أن العلاقة $(\exists x)(\exists y) R$ تستلزم العلاقة $(\exists y)(\exists x) R$، وكان علينا

أن نبرهن على التكافؤ بينهما : وهذا ليس خطيراً نظراً لأن الاستلزام العكسي يمكن إثباته بطريقة مماثلة ؛ (2) لقد اكتفينا بإثبات أن صدق العلاقة $R(\exists y)(\exists x)$ يستلزم صدق العلاقة $R(\exists x)(\exists y)$ والحال أن الاستلزام يمكن أن يتحقق بقطع النظر عن صدق طرفيه ؛ (3) لقد قبلنا بإن الشرط اللازم والكافي لصدق علاقة من الشكل $R(\exists x)$ هو إمكانية إيجاد كائن A بحيث تصدق العلاقة $R(A/x)$: ولكن تشير القاعدة (م م) إلى أن هذا الشرط كافي فقط .

وفي ما يتعلق بالنقطة (3) ، فإنه يمكن تبريرها بواسطة اعتبارات الفقرة 9 . أما النقطة (2) فإننا نبررها باستعمال **طريقة الافتراض** المساعد . وهذا نصها : لتكن لدينا علاقتين R و S ؛ نظيف مؤقتاً R إلى مسلّمات الرياضيات (وهذا ما نشير إليه عندما نقول «نفترض أن R صادقة») ، ولنفترض أن S صادقة في الرياضيات «الجديدة» هذه ؛ عندئذٍ تصدق العلاقة $(R \Rightarrow S)$ ، (في الرياضيات العادية طبعاً !) . ويمكن تبرير هذه الطريقة بواسطة المعايير الابتدائية ، أي تلك التي تعرّضنا لها في الفقرة الرابعة والفقرة الخامسة : نكتب متتالية من الإشارات انطلاقاً من المسلمات «الجديدة» (أي المسلمات العادية و R) ووصولاً إلى S ، وعلى مراحل نبرهن أن كل علاقة من السلسلة هي نتيجة منطقية لِـ R ، ونحصل في المرحلة الأخيرة على الاستلزام $(R \Rightarrow S)$.

ملاحظة 8. في حالات كثيرة ، علينا أن نكتب نفي علاقة تحتوي على مكممين متتاليين (أو أكثر) ، ويجد المبتدئون بعض المشقة عند قيامهم بهذا العمل . لنقم على سبيل المثال ، بنفي العلاقة $R(\exists y)(\forall x)$. لنرمز مؤقتاً بِـ S للعلاقة $R(\exists y)$ ، وتصبح المسألة هي نفي $S(\forall x)$ ؛ وهذه الأخيرة هي

$$\text{لا}[(\exists x)(\text{لا } S)] \text{ ؛}$$

ويكون نفيها ، حسب (ت م 3) ، هو $(\exists x)(\text{لا } S)$. وبما أن S هي $R(\exists y)$ ، وهي تكافئ $(\exists y)(\text{لا لا } R)$ ، فإننا نرى أن (لا S) تكافئ $(\forall y)(\text{لا } R)$ ؛ ونحصل بالتالي على النتيجة المنشودة ، وهي أن نفي العلاقة

$$(\forall x)(\exists y) R$$

يكافئ العلاقة

$$(\exists x)(\forall y)(\text{لا}\ R) .$$

9. عملية هلبرت . معايير التكوين

نختم هذا الفصل بدراسة تهم القرّاء غير المبتدئين الذين لهم اهتمام بالمنطق، وسنعطي توضيحات إضافية حول إحدى الجمل الممكنة، وهي التي استعملها ن. بورباكي في كتابه: عناصر الرياضيات.

ونستعمل في هذه الجملة سبعة إشارات أساسية وبعض الحروف. وتوجد ضمن هذه الإشارات أربعة ذات صبغة منطقية بحتة، وهي

$$\square ،\ \tau ،\ \text{لا} ،\ \text{أو}$$

أما الإشارات الثلاث الأخرى فهي ذات طبيعة رياضية بأتم معنى الكلمة، وهي

$$= \text{ و } \in \text{ و } \supset$$

وسنقدمها في الفصلين الأول والثاني (الإشارة $\supset$ هي إشارة الزوج؛ أنظر المعيار (كار 2) أسفله).

إننا نحصل على حشد عندما نكتب متتالية من الإشارات والحروف، ويمكن لبعض الإشارات، الواردة في الحشد أن تكون متصلة مع بعض الإشارات $\square$ بواسطة أربطة - على سبيل المثال، إن العبارة

$$\tau x \in y = \in \in yx = z\ \square$$

هي حشد.

نعتبر حشداً A وحرفا x؛ نهدف إعطاء طريقة تمكننا من الحصول على حشد جديد لا يحتوي الحرف x مع أننا نرمز له بالكتابة

$$\tau_x(A) ;$$

ويتم الحصول عليه عندما نقوم بالعمليات الثلاث التالية :

أ) نكتب الحشد τA الحاصل عن كتابة A مسبوقة بالإشارة τ ؛

ب) نربط الإشارة τ المكتوبة قبل A مع كل مكان توجد به x، بربطة ؛

ج) نعوض، في الحشد الناتج، الحرف x بالإشارة $\square$ أينما وجد x.

وإذا كان، على سبيل المثال، A هو الحشد المكتوب أعلاه، فإن $\tau_x(A)$ تكون هي الحشد

$$\tau\tau\square \in y = \in \in y \square = z \square .$$

إن عملية الانتقال من A إلى $\tau_x(A)$ هي من ابتكار هلبرت، وسنرى في ما بعد معناها الحدسي.

أما الآن فإننا سنعطي نص معايير تكوين العلاقات والكائنات الرياضية ؛ وهذه المعايير هي :

(كار 1) : كل حرف هو كائن رياضي.

(كار 2) : إذا كان A و B كائنين رياضيين، فإن الحشد

$$\supset AB ،$$

الذي نرمز له عملياً بِـ

$$(A, B) ،$$

هو كائن رياضي.

(كار 3) : إذا كان A و T كائنين رياضيين، و x حرفا، فإن الحشد $(A/x)T$، الذي نحصل عليه بعد تعويض الحرف x أينما وجد بالحشد A، هو كائن رياضي.

(كار 4) : إذا كانت R علاقة و x حرفا، فإن الحشد $\tau_x(R)$ كائن رياضي.

(ع 1) : إذا كانت R و S علاقتين ، فإن الحشد

$$\text{أو}\ RS$$ ،

الذي يُكتب عملياً

$$(R \ \text{أو}\ S)$$ ،

هو أيضاً علاقة .

(ع 2) : إذا كانت R علاقة ، فإن الحشد

$$\text{لا}\ R$$

علاقة .

(ع 3) : إذا كانت R علاقة ، و x حرفا ، و A كائناً رياضياً ، فإن الحشد

$$(A/x)R$$

علاقة .

(ع 4) : إذا كان A و B كائنين رياضيين ، فإن الحشد

$$= AB$$ ،

الذي نرمز له عادة بِـ

$$A = B$$ ،

هو أيضاً علاقة .

(ع 5) : إذا كان A و B كائنين رياضيين ، فإن الحشد

$$\in AB$$ ،

الذي نرمز له عملياً بِـ

$$A \in B$$ ،

هو أيضاً علاقة .

لا توجد في الرياضيات طرق أخرى لتكوين الكائنات الرياضية والعلاقات؛ وباستثناء (كار 4) التي تستعمل بصورة غير مباشرة أغلب الأحيان، فإن المعايير السابقة تستخدم عملياً في كل لحظة.

نلاحظ أن المكممين $\exists$ و $\forall$ لم يدخلا في النصوص السابقة: وذلك لأننا نستطيع الآن إدخالها كمختصرات بسيطة (بواسطة عملية هلبرت).

وبصورة أدق، نعتبر علاقة R وحرفا x، عندئذ

$$(\exists x)R$$

تصبح بالتعريف هي العلاقة

$$(\tau_x(R)/x)R$$

التي نحصل عليها عندما نعوض في R، الحرف x أينما وجد، بالكائن الرياضي $\tau_x(R)$. وبالتالي فإن الشرط اللازم والكافي لصدق العلاقة $(\exists x)R$ هو أن الكائن $\tau_x(R)$ يحقق العلاقة R، وهذا ما يجعلنا نؤول عملية هلبرت على النحو التالي: إنها تكمن في اختيار نهائي، بالنسبة لكل علاقة R وكل حرف x، لكائن يحقق العلاقة $R\{x\}$ (إذا «وجد»، وإلا فإن $\tau_x(R)$ يكون كائناً ما، لا يمكن أن نقول عنه شيئاً). ومن الواضح أن هذا «الاختيار» له صبغة صورية بحتة: وتكمن أهمية عملية هلبرت في أنها تعطي طريقة لإنشاء كائن ما، بحيث نعرف أنه يحقق شروط معينة فقط (في حالة وجود كائنات من هذا النوع).(*) ونستعمله الآن عوضاً عن مسلمة الاختيار (ف 2 ملاحظة 7).

وعادة، في المجال العملي، فإننا قليلاً ما نحتاج إلى استخدام عملية هلبرت (أنظر ف 5، ملاحظة 1 المتعلقة بتعريف أعداد الكاردينال)، إذ أنها لا تؤدي بطبيعة الحال إلى أي نتيجة «علنية». وكما هو الحال بالنسبة لإله الفلاسفة، فإن عملية هيلبرت لا تفهم ولا ترى؛ ولكنها تسيّر كل شيء، وتظهر خواصها وميزاتها في كل مكان.

(*) إن القول بأن $\tau_x(R)$ تحقق R إذا وجد كائن A يحقق R، إن هذا القول هو شكل آخر للمسلمة (م م 5).

ف 1. علاقات التساوي والانتماء

1. علاقة التساوي

لقد أدخلنا في الفصل السابق إشارات ذات طبيعة منطقية بحتة : وهي تساعد أساساً على الحصول على براهين «شكلية» بطرق ليست تماماً رياضية. أما في هذا الفصل، فإننا سندخل «إشارتين أساسيتين» (إشارة التساوي وإشارة الانتماء) تساعدان على إنشاء علاقات وكائنات ذات معنى رياضي بحت.

ونعطي إشارة المساواة الرّمز

$$=$$

ونستعمله لإنشاء علاقات على النحو التالي : إذا كان لدينا كائنين رياضيين a و b فإننا نحصل على علاقة بكتابة

$$a = b$$

أي بكتابة الحرف الأول ثم إشارة التساوي ثم الحرف الثاني. وتعني العلاقة السابقة، في حالة صحتها، أن الكائنين الممثلين بـ a و b «متطابقان» - ولن نحاول تعميق هذا المفهوم، لأن المهم هو معرفة استخدام الإشارة = وليس فهم «معناها العميق» - ويكفي الاعتماد على النص التالي، وهو يلخص «القواعد» التي ينبغي اتباعها لكتابة علاقات التساوي.

نظرية 1 - لدينا الخواص التالية :

أ) إن العلاقة $x = x$ محققة من أجل كل x .

ب) إن العلاقتين $x = y$ و $y = x$ متكافئتان من أجل كل x وكل y

جـ) من أجل كل x و y و z فإن العلاقتين $x = y$ و $y = z$ تستلزمان $x = z$

د) إذا كان لدينا كائنان u و w بحيث $u = v$ وإذا كان لدينا علاقة $R\{x\}$ تحوي حرفا x ، عندئذ نحصل بعد تعويض x في $R\{x\}$ بـ u ثم بـ v ، نحصل على علاقتين $R\{u\}$ و $R\{v\}$ متكافئتين .

ملاحظة 1 - ويعني النص د) من النظرية أن كائنين مساويين يتمتعان بنفس الخواص أي أي كل نص يحققه a يحققه أيضاً b وكذلك العكس . أما في ما يخص «برهان» النظرية 1 فهذا ليس من الهيّن ويمكن اعتباره من مسلمات الرياضيات .

2. علاقة الانتماء

إن الإشارة الأساسية الثانية في الرياضيات هي إشارة الانتماء ونرمز لها

$$\in$$

وهي أيضاً تساعد على إنشاء علاقات انطلاقاً من كائنات رياضية : إذا كان a و b كائنين رياضيين ، فإننا نحصل على علاقة بكتابة

$$a \in b$$

ونقول عندئذ أن

a ينتمي إلى b

أو أن a عنصر من b

ويكتب نفي هذه العلاقة على الصورة

$$a \notin b .$$

وهنا أيضاً فإن المهم هو معرفة قواعد استعمال الإشارة $\in$ ونلخصها في ما يلي :

نظرية 2 – لتكن A و B مجموعتين؛ إن الشرط اللازم والكافي ليكون لدينا $A = B$ هو أن تكون العلاقتان

$$x \in A \quad \text{و} \quad x \in B$$

متكافئتين .

ملاحظة 2 – إذا أردنا اعطاء تفسيراً للإشارة $\in$ فإنه ينبغي اعتبار كل كائن رياضي وكأنه مجموعة كائنات وإذا تحققت العلاقة $x \in y$ فإنها تعني أن x هو أحد الكائنات التي تؤلف المجموعة y ، وعندئذ فإن النظرية 2 تعني أن مجموعتي كائنات تكونان متطابقتين إذا وإذا فقط كانتا تحتويان نفس الكائنات (أي أن كل كائن من المجموعة الأولى ينتمي للثانية والعكس أيضاً) .

ويمكن اعتبار الكائنات الرياضية إما مجموعات كائنات أخرى وإما كائنات فردية (وسنرى في الفقرة 6 أنه لا يوجد أي تناقض بين الاعتبارين) . هذا وإن الاعتبار المفترض يكون دائماً متعلقاً بنص المسألة وبدارسها . ونستعمل عادة الحروف الكبيرة عندما نعتبر مجموعات والحروف الصغيرة عندما نعتبر الكائنات الفردية ، على أن هذه القاعدة هي مجرد إصطلاح يمكن عدم التقيد به بعض الأحيان .

ملاحظة 3 – عندما نقول ان الكائنات الرياضية هي مجموعات لكائنات أخرى فإننا لا نعطي تعريفاً رياضياً لمفهوم المجموعة؛ **ولا يمكن حلّ هذه المسألة إلا بالطرق المتبعة في ف ٥، رقم ٩، أو بطرق مماثلة**

هذا وإن مسألة تعريف المجموعة هي مسألة حدسية بحيث المهم هو معرفة العلاقات بين المجموعات والبراهين المنطقية التي يمكن القيام بها في المجموعات

3. أجزاء مجموعة

نعرّف الآن، بواسطة إشارة الانتماء، إشارة أخرى نرمز لها
$\subset$
ونسميها إشارة الاحتواء. وإذا كان لدينا مجموعتين A و B فإن

$$A \subset B$$

هي العلاقة التالية:
من أجل كل x فإن العلاقة $x \in A$ تستلزم $x \in B$.
أي أن $A \subset B$ هي علاقة تعني أن كل عنصر من A هو أيضاً في B.
والعلاقة $A \subset B$ تقرأ: A **محتواة في** B أو B تحتوي A أو A جزء من B، ونكتب أيضاً

$$B \supset A.$$

نظرية 3 - تتمتع علاقة الاحتواء بالخاصيتين:

أ) إذا كان لدينا $A \subset B$ و $B \subset C$ فإنه يكون لدينا $A \subset C$:

ب) الشرط اللازم والكافي ليكون $A = B$ هو $A \subset B$ و $B \subset A$

يمكن الحصول على النص أ) بواسطة القاعدة (ت م 1) من ف 0. أما النص ب) فمن الواضح أنه يقتصر على النظرية 2.

نظرية 4 - لتكن $R\{x\}$ علاقة يظهر فيها متغير x! من أجل كل مجموعة X فإنه يوجد جزء A من X، وحيد، بحيث يحقق الخاصية التالية: الشرط اللازم والكافي ليكون $x \in A$ هو أن تكون العلاقتان $x \in X$ و $R\{x\}$ محققتين.

ونقول عن A أنها مجموعة العناصر $x \in X$ التي تتحقق من أجلها العلاقة $R\{x\}$.

مثال 1 - نعتبر أن X هي مجموعة الأعداد الطبيعية وأن $R\{x\}$ هي العلاقة «x يقبل القسمة على 2»؛ تكون عندئذ A هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

ملاحظة 4 – إن برهان النظرية 4 يتطلب مسلمات أقل وضوحاً منه وعلى القارئ المبتدئ أن يقبل هذه النظرية. على أنه يمكن أن نرى، حدسياً، أن A هي **المجموعة المؤلفة من العناصر** $x \in X$ **التي تحقق** $R\{x\}$.

ملاحظة 5 – على الرغم مما يشير إليه التفكير السليم فليس صحيحاً أن كل علاقة $R\{x\}$ تعرف مجموعة (بمفهوم ف 0) تكون عناصرها كل الكائنات x التي تحقق العلاقة $R\{x\}$ (وتقول فقط النظرية أن هذا صحيح إذا لم نعتبر سوى الكائنات x التي تنتمي إلى مجموعة X معطاة مسبقاً)، وقد كان عدم الاحتياط حول هذه النقطة هو ما جعل الرياضيين يكتشفون في نهاية القرن الماضي «متناقضات نظرية المجموعات» المشهورة.

لنأخذ مثلا العلاقة $x \notin x$؛ لنفترض وجود مجموعة A بحيث تكون العلاقتان $x \in A$ و $x \notin A$ متكافئتين؛ وإذا عوّضنا x بـ A فإننا نجد، حسب القاعدة (ت م 7) من ف 0، أن العلاقة $A \in A$ تكافئ العلاقة $A \notin A$، أي أن الرياضيات في تناقض مع نفسها! (وفي الواقع أن لا أحد على يقين من العكس في الوقت الحاضر، وكلما نكتشف تناقضاً فإننا نستنتج أن الافتراض الذي أدى إلى التناقض هو افتراض خاطئ).

كما أن مفهوم **مجموعة كل المجموعات** هو أيضاً متناقض، إذ أنه، حسب النظرية 4، يسمح بالحديث عن مجموعة كل الكائنات x التي تحقق $x \notin x$، وهذا مستحيل كما سبق أن رأينا.

وتشير هذه الأمثلة إلى أن استعمال كلمة «مجموعة» في الرياضيات يتطلب تقييدات غير حدسية.

نأخذ، من أجل توضيح النظرية 4، مجموعة X، وجزء M من X و $R\{x\}$ العلاقة $x \notin M$؛ ونحصل بذلك على جزء A من X يسمى **متمم** M **في** X، ونرمز له

$$C_X^M \quad \text{أو} \quad X - M$$

(لن نستعمل سوى الرّمز $X - M$)؛ فهو إذن مجموعة عناصر X التي لا تنتمي إلى M.

نظرية 5 - ليكن M و N جزئين من مجموعة X ؛ تكون عندئذ العلاقتان

$$X - N \subset X - M \quad و \quad M \subset N$$

متكافئتين. ولدينا من أجل كل جزء M من X

$$\cdot X - (X - M) = M$$

تتألف المجموعة $X - (X - M)$ من العناصر $x \in X$ حيث تكون العلاقة $x \in X - M$ غير صحيحة؛ وهذه الأخيرة، إذا كان $x \in X$، تكافؤ نفي $x \in M$ ؛ أي أن $X - (X - M)$ تتألف من العناصر $x \in X$ حيث يكون نفي $x \in M$ خاطئاً، أي حيث تكون العلاقة $x \in M$ صحيحة، ومنه يكون لدينا الدستور

$$\cdot X - (X - M) = M$$

لنفترض $M \subset N \subset X$ ؛ بما أن العلاقة $x \in M$ تستلزم $x \in N$ فإن نفي هذه الأخيرة يؤدي إلى نفي الأولى وبالتالي $X - N \subset X - M$. وعكسياً، حسب نفس البرهان، إن العلاقة الأخيرة تؤدي إلى

$$X - (X - M) \subset X - (X - N)$$

أي $M \subset N$، وبهذا ينتهي البرهان.

م° **ملاحظة 6** - إن البرهان السابق غير كاف منطقياً إذ أنه يستعمل المعنى الحدسي لكلمة «مجموعة». وإذا أردنا إعطاء برهان صحيح للعلاقة $X - (X - M) = M$، مثلاً، فإنه ينبغي إدخال العلاقتين

$$R: x \in M \qquad S: x \in X \;؛$$

وافتراض أن M جزء من X، يعني أن R تستلزم S؛ كما أن العلاقة $X - (X - M) = M$ تعني أن R تكافئ العلاقة

$$S \text{ و } [\text{لا}(S \text{ و } (\text{لا} R))]$$

إذا كانت R تستلزم S. ولإثبات التكافؤ بين العلاقتين المذكورتين فإنه ينبغي، بطبيعة الحال، استخدام قواعد البراهين كما هي مذكورة في ف 0.

ويشير ما سبق إلى أنّ النصوص التي تبدو بديهية، هي التي تتطلب براهين غير بسيطة، وهذا ما لاحظه من قبل العلماء الإغريق.

4. المجموعة الخالية

لتكن X مجموعة؛ بما أن X هي أيضاً جزء من نفسها فإنه يمكن اعتبار المجموعة

$$\Phi = X - X$$

التي تسمي جزء X الخالي؛ وبذلك فإن العلاقة $x \in \Phi$، تكافؤ ربط العلاقتين

$$x \in X \quad \text{و} \quad x \notin X$$

بحيث لا يوجد أي كائن x مع $x \in \Phi$.

إن المجموعة $\Phi = X - X$ لا تتعلق بالمجموعة X، وبتعبير آخر، لدينا

$$X - X = Y - Y$$

مهما كانت المجموعتان X وY؛ إذ أن $X - X$ و$Y - Y$ تتألفان من نفس العناصر، لأنهما لا يحتويان أي عنصر...

ملاحظة 7 - إن البرهان السابق ليس برهاناً في الواقع؛ وينبغي أن نثبت، حسب النظرية 2، أن العلاقة $x \in X - X$ تكافؤ العلاقة $x \in Y - Y$؛ لتكن R العلاقة $x \in X$، و S العلاقة $x \in Y$، وتعود المسألة إلى برهان أن العلاقة

$$R \text{ و } (\text{لا } R)$$

تكافؤ العلاقة

$$S \text{ و } (\text{لا } S)،$$

وهذا ناتج عن أنه مهما كانت العلاقتين R و T فإن العلاقة

$$(R \text{ و } (\text{لا } R)) \Leftarrow T$$

محققة دوماً (ف 0 تمرين 2) .

وهكذا فإن المجموعة $X - X = \Phi$ لا تتعلق بـ X ، وتسمى : **المجموعة الخالية** ؛ وهي لا تحتوي أي عنصر ، وبصورة أدق فإن العلاقة $x \in \Phi$ ليست صحيحة ، مهما كان x .

ومن الواضح أن

$$\Phi \subset X$$

مهما كانت المجموعة X ، وهذه الخاصية تميز المجموعة الخالية ! إذ أنه إذا كانت لدينا مجموعتان A و B بحيث $A \subset X$ و $B \subset X$ مهما كانت المجموعة X ، فإننا نحصل على $A \subset B$ و $B \subset A$ أي $A = B$.

5. المجموعات المؤلفة من عنصر أو من عنصرين

ليكن x كائناً رياضياً ؛ توجد مجموعة وحيدة يرمز لها $\{x\}$ وتتمتع بالخاصة التالية : إن العلاقة $y \in \{x\}$ تكافؤ $y = x$. وكل مجموعة من هذا الصنف تسمى **مجموعة مؤلفة من عنصر واحد**. ومن الواضح أن العلاقتين

$$x = y \quad \text{و} \quad \{x\} = \{y\}$$

متكافئتان مهما كان x و y .

وسنستعمل كثيراً النتيجة التالية

نظرية 6 - لأجل أن تكون مجموعة X مجموعة مؤلفة من عنصر واحد فإنه يلزم ويكفي أن يتحقق الشرطان

أ) X غير خالية

ب) لدينا $x = y$ مهما كان $x \in X$ و $y \in X$.

من الواضح أن الشرطين لازمان. لنفترض عكسياً أنهما محققان ونقوم باختيار عنصر x من X (وهذا ممكن لأن X غير خالية) ؛ إن العلاقة

$y = x$ تستلزم $y \in X$ ، كما أن العلاقة $y \in X$ تستلزم $y = x$ حسب الشرط ب) ؛ وهكذا فإن $y \in X$ تكافؤ $y \in \{x\}$ ، وبالتالي $\{x\} = X$ ، وبهذا ينتهي البرهان .

نعتبر الآن كائنين رياضيين x و y ؛ توجد عندئذ مجموعة وحيدة ، نرمز لها $\{x, y\}$ يَكون عنصراها الوحيدين هما x و y - وبتعبير آخر فإن العلاقة

$$z \in \{x, y\}$$

تكافؤ العلاقة

$$z = x \quad \text{أو} \quad z = y \; .$$

وإذا كان $x \neq y$ فتسمى كل مجموعة من هذا الصنف **مجموعة مؤلفة من عنصرين**، أو ذات عنصرين ؛ وإذا كان $x = y$ فمن الواضح أن

$$\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$$

أي أن المجموعة تكون مؤلفة من عنصر واحد .

وبطريقة مماثلة نعرّف المجموعات ذات ثلاثة أو أربعة عناصر . . وهذه المجموعات تسمى مجموعات منتهية ، والمجموعات الأخرى تسمى مجموعات غير منتهية ؛ وسندرس هذين المفهومين من جديد في الفصل 5 .

م ملاحظة 8 - إن وجود مجموعات ذات عنصر واحد أو عنصرين أو ثلاثة عناصر . . . ، يبدو بديهياً ؛ لكن لا يمكن إثباته - وبعبارة أوضح ، فإن النص «مهما كان x و y فإنه توجد مجموعة يكون عنصراها الوحيدين هما x و y» هو في الواقع مسلمة يمكن أن نستنتج منها وجود أصناف أخرى من المجموعات المنتهية .

ونضيف إلى ذلك أن وجود مجموعات غير منتهية هو أيضاً من مُسَلّمات الرياضيات (إن مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة غير منتهية ، لكننا لم نعط تعريفاً رياضياً لهذه الأعداد ولم نثبت أنها تنتمي لنفس المجموعة . . .) . أنظر ف 5 .

6. مجموعة أجزاء مجموعة ما

لتكن X مجموعة، توجد مجموعة وحيدة

$$\mathcal{P}(X)$$

- وهذه أيضاً إحدى مسلمات الرياضيات - تحقق الخاصية التالية:
إن عناصر $\mathcal{P}(X)$ هي أجزاء X، وبتعبير آخر فإن العلاقتين

$$Y \subset X \quad \text{و} \quad Y \in \mathcal{P}(X)$$

متكافئتان. وتسمى $\mathcal{P}(X)$ **مجموعة أجزاء** X.

ملاحظة 9 - إن عملية الانتقال من مجموعة X إلى المجموعة $\mathcal{P}(X)$ تمكن من الحصول على مجموعات معقدة أكثر فأكثر. وسنرى في 5 أنه إذا كانت X منتهية ومؤلفة من n عنصر فإن $\mathcal{P}(X)$ تكون أيضاً منتهية ومؤلفة من 2^n عنصر. وهكذا فإن المجموعات

$$\Phi \text{،} \ \mathcal{P}(\Phi) \text{،} \ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Phi)) \text{،} \ \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\Phi)\big)\Big) \text{،} \ \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\Phi)\right)\big)\Big)...$$

تتألف على التوالي من (أنظر ف 5 ملاحظة 6)
0، 1، $2^2 = 4$، $2^4 = 16$، $2^{16} = 65.536$، ... عنصر.

ونلاحظ من جهة أخرى أن لدينا دائماً

$$X \in \mathcal{P}(X)$$

مهما كانت المجموعة X؛ وهذا يثبت، كما أشرنا في الملاحظة 2، أن كل مجموعة هي عنصر من مجموعة أخرى، وأبسط طريقة لملاحظة ذلك هي كتابة العلاقة

$$X \in \{X\}.$$

ف 2. مفهوم التابع

1. الأزواج

لقد أدخلنا، في الفصل السابق، الإشارتين = و ∈، اللتان تساعدان على إنشاء العلاقات. وسندخل الآن عملية تساعد على إنشاء الكائنات الرياضية.

وتكمن هذه العملية، انطلاقاً من كائنين رياضيين x و y بهذا الترتيب، في إنشاء كائن ثالث، يرمز له

$$(x, y)$$

ويسمى **الزوج** (x, y)؛ وتخضع عملية تكوين الأزواج إلى القاعدة الوحيدة التالية: الشرط اللازم والكافي ليكون لدينا

$$(x, y) = (u, v)$$

هو أن يكون

$$x = u \quad \text{و} \quad y = v.$$

وبصورة خاصة، لا يمكن أن يكون $(x, y) = (y, x)$ إلاّ إذا كان $x = y$ مما يثبت أن الترتيب في كتابة الزوج أساسي. كما ينبغي التفريق بين مفهوم الزوج (x, y) ومفهوم المجموعة $\{x, y\}$ المعرّف في ف 1.

ملاحظة 1 – يمكن أن نعتبر أن مفهوم الزوج هو إشارة أساسية (ف 0 رقم 1) تسمح، مع الإشارات

أو، لا، τ، □، =، ∈

وحروف، بكتابة الرياضيات في لغة شكلية. على أنه يمكن التعبير عن مفهوم الزوج بواسطة الإشارات الأساسية الأخرى: يكفي تعريف الزوج (x, y) بالمجموعة

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

المؤلفة من عنصرين، وهما المجموعة $\{x\}$ والمجموعة $\{x, y\}$، ومن الواضح أنه إذا عرّفنا الزوج بهذه الطريقة فإننا نخضع للقاعدة الأساسية التي تعطي شرط تساوي زوجين. غير أن هذه الطريقة تبرز، في مفهوم الزوج، نقطة خالية من الفائدة. ومن الأفضل اتباع التعريف الذي أخذناه في البداية، مع العلم أن المسألة الوحيدة التي لها أهمية في الرياضيات هي معرفة متى يكون زوجان متساويين.

نقول عن كائن z أنه زوج إذا وجد كائنان x و y بحيث $z = (x, y)$؛ ويكون x و y معرّفين تماماً بإعطاء z، وذلك حسب القاعدة المذكورة في البداية؛ ونقول عن x أنه **المسقط الأول** لِـ z و y هو **المسقط الثاني**، ونكتب

$$x = pr_1 z \quad ، \quad y = pr_2 z .$$

نقول عن مجموعة G أنها **بيان**، إذا كان كل عنصر من G هو زوج. وإذا كان ذلك محققاً فإنه توجد مجموعتان X و Y متميزتان بالشروط التالية: إن العلاقة $x \in X$ (وعلى التوالي $y \in Y$) تكافؤ وجود عنصر $z \in G$ بحيث $x = pr_1(z)$ (وعلى التوالي $y = pr_2(z)$). ونكتب عندئذ

$$X = pr_1(G) \qquad Y = pr_2(G)$$

ويمكن تعميم مفهوم الزوج على النحو التالي: إذا كان لدينا ثلاثة كائنات x, y, z فإننا نضع

$$(x, y, z) = ((x, y), z)$$

ونقول عن (x, y, z) أنها ثلاثية؛ ولأجل أن يكون

$$(x, y, z) = (x', y', z')$$

فإنه يلزم ويكفي أن يتحقق

$$x = x' \quad و \quad y = y' \quad و \quad z = z' \text{ ؛}$$

إذ أن العلاقة التي اعتبرناها، تكتب $((x, y), z') = ((x', y'), z')$ وتكافؤ بالتالي $(x, y) = (x', y')$ و $z = z'$ ومنه $x = x'$ و $y = y'$ و $z = z'$.
وبنفس الطريقة، إذا اعتبرنا أربعة كائنات t, z, y, x فإننا نضع

$$(x, y, z, t) = ((x, y, z), t)$$

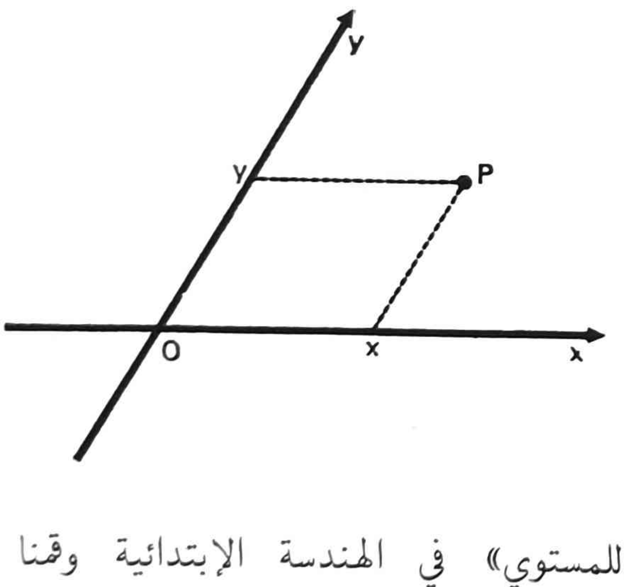
ونسمي (x, y, z, t) رباعية، الخ . . .

2. الجداء الديكرتي لمجموعتين

لتكن X و Y مجموعتين؛ يمكن أن نبرهن (بواسطة طرق ف 0) وجود مجموعة Z متميزة بالخاصة التالية: الشرط اللازم والكافي ليكون لدينا $z \in Z$ هو وجود $x \in X$ و $y \in Y$ بحيث $z = (x, y)$. ونقول عن Z أنها الجداء الديكرتي لـX و Y (على الترتيب المذكور) ونكتب

$$Z = X \times Y.$$

وهكذا فإن $X \times Y$ هي مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in X$ و $y \in Y$.



إذا نظرنا «للمستوي» في الهندسة الإبتدائية وقمنا باختيار محوري إحداثيات ox و oy، ووحدتي قياس في المحورين، فإنه يمكن أن نقابل كل نقطة P في المستوى بزوج (x, y) بحيث إذا كانت P' نقطة معرّفة بالزوج

(x',y') فإن $P=P'$ يكافئ $x=x'$ و $y=y'$ أي $(x,y)=(x',y')$ ؛ وإذا رمزنا بـ **R** لمجموعة الأعداد الحقيقية فإننا نرى أن ما سبق يسمح بعدم التفريق بين المستوي والمجموعة

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$ ،

وهذا ما جعلنا نعطي صفة «ديكرتي» للجداء المعرّف، إذ أن العالم ديكارت (Descartes) هو الذي اخترع محاور الإحداثيات.

لتكن Y, X, B, A أربعة مجموعات؛ لدينا كما هو واضح $A\subset X$ و $B\subset Y$ تستلزمان $A\times B\subset X\times Y$ ؛ وإذا كانت A و B غير خاليتين فإن العكس أيضاً صحيح؛ بالفعل، إذا كان $A\times B\subset X\times Y$ وإذا كان $b\in B$ فإنه يكون لدينا من أجل كل $(a,b)\in A\times B, a\in A$ ومنه $(a,b)\in X\times Y$ أي أنه يوجد $x\in X$ و $y\in Y$ بحيث $(a,b)=(x,y)$ ، وبالتالي $a=x$ حيث $x\in X$ ، أي $A\subset X$ ؛ ونبرهن بطريقة مماثلة أن $B\subset Y$ ، بمجرد افتراض A غير خالية.

أما إذا كانت إحدى المجموعتين A أو B خالية، فإنه يكون لدينا دائماً $A\times B\subset X\times Y$ إذ إن $A\times B=\Phi$ إذا كان لدينا $\mathrm{A}=\Phi$ أو $\mathrm{B}=\Phi$ ؛ بالفعل، إذا كانت العلاقة $A\times B=\Phi$ غير محققة، فإن $A\times B$ تحتوي على الأقل زوجاً (x,y) وبالتالي فإن $x\in A$ و $y\in B$ ، وهذا يثبت أن A و B غير خاليتين.

إن مفهوم الجداء الديكارتي يعمم لحالة عوامل كثيرة، فإذا كانت لدينا مجموعات X ، Y ، Z T ، ...، فإننا نعرّف

$$X\times Y\times Z=(X\times Y)\times Z \text{ ؛ } X\times Y\times Z\times T=(X\times Y\times Z)\times T \text{ ؛ } \ldots$$

إن عناصر المجموعة $X\times Y\times Z$ هي الثلاثيات (x,y,z) المعرّفة في رقم 1 حيث $x\in X$ و $y\in Y$ و $z\in Z$ ؛ كما أن عناصر $X\times Y\times Z\times T$ هي الرباعيات (x,y,z,t) حيث $x\in X$ و $y\in Y$ و $z\in Z$ و $t\in T$.
نلاحظ أن العلاقة

$$(X\times Y)\times Z = X\times(Y\times Z)$$

ليست صحيحة ؛ إذ إن عناصر الطرف الأيسر هي كائنات من الشكل $((x, y), z)$ حيث $x \in X$ و $y \in Y$ و $z \in Z$ ، أما عناصر الطرف الأيمن فهي من الشكل $(x, (y, z))$ – علمًا بأن قاعدة تساوي زوجين لا تسمح بكتابة $((x, y), z) = (x, (y, z))$ مهما كان x و y و z . ومع هذا فنحن لا نفرق عمليًا بين $(x, (y, z))$ و $((x, y), z)$ ونعتبر أن $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$ ؛ وعلى الرغم من كون هذا الاصطلاح متناقض، فإن استعماله لا يؤثر على البراهين إذا تعودنا على مفهوم نظرية المجموعات.

وأخيراً، إذا كانت X مجموعة ما، فإننا نضع

$$X^2 = X \times X \text{ ، } X^3 = X \times X \times X \text{ ، } X^4 = X \times X \quad X \times X \text{ ، } \ldots$$

وعلى سبيل المثال، إذا كانت $\mathbf{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن $\mathbf{R}^4$ تكون مجموعة الرباعيات (x, y, z, t) المؤلفة من أربعة أعداد حقيقية؛ وهذا ما يسميه الفيزيائيون «فراغ ذي أربعة أبعاد» أو «فراغ الزمن» ؛ وعلى القارئ المبتدئ ألا يتأثر كثيراً من هذه الأسماء، إذ أنه عملياً ليس من الأصعب البرهان في $\mathbf{R}^4$ منه في $\mathbf{R}^2$ أو $\mathbf{R}^{100}$.

ومن البديهي، كما هو الحال بالنسبة لعاملين، أن جداء مجموعات يكون خالياً بمجرد كون أحد العوامل خالياً.

3. البيانات والتوابع

لتكن X و Y مجموعتين؛ نسمي تابعاً معرفاً في X ويأخذ قيمه في Y كل عملية تكمن في مقابلة كل عنصر x من X ، بعنصر y من Y ، بحيث يكون y مرتبطاً بـ x حسب قانون معين : مثلاً $y = \sin x$ عندما نأخذ $X = Y = \mathbf{R}$.

إن «التعريف» السابق، يحتوي كلمات لم نعرّفها رياضيًّا – ومن جملتها عبارة «مقابلة» .

وهذا ما يفرض علينا تغيير التعريف السابق على النحو التالي :

نسمي **تابعاً** كل ثلاثية

$$f = (G, X, Y)$$

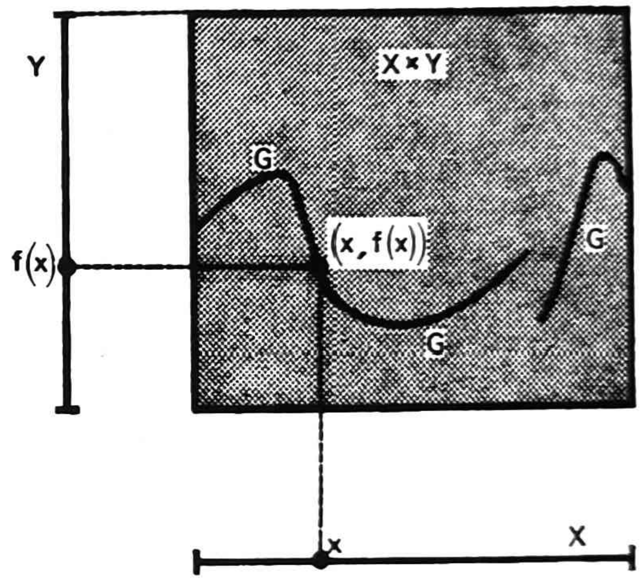
حيث G و X و Y هي ثلاثة مجموعات تحقق الشروط التالية:

$$G \subset X \times Y \qquad (F_1)$$

(F_2) من أجل كل $x \in X$ ، يوجد $y \in Y$ وحيد بحيث $(x, y) \in G$.

ويعني الشرط (F_1) أن G بيان (رقم 1)؛ ونقول عن G أنه بيان التابع f؛ ومن أجل كل $x \in X$ فإنه يوجد، حسب (F_2)، عنصر $z \in G$ بحيث

$pr_1(z) = x$ وبالتالي $pr_2(G) \subset Y$ ، $pr_1(G) = X$



ليكن x عنصراً من X؛ إن العنصر الوحيد $y \in Y$ بحيث $(x, y) \in G$ يسمى قيمة التابع f في x ونكتب ذلك على الشكل

$$y = f(x);$$

ويكون بذلك واضحاً أن G ، بيان f، هي مجموعة الأزواج $(x, f(x))$ حيث $x \in X$. ويتوافق هذا مع ما نعرفه حدسياً حول مفهوم التابع.

وإذا كان لدينا تابعاً $f = (G, X, Y)$ فإن X تسمى **مجموعة انطلاق التابع** و Y **مجموعة وصوله**.

لتكن لدينا مجموعتين X و Y . نسمي **تطبيقاً** لـ X في Y كل تابع تكون X

مجموعة انطلاقه و Y مجموعة وصوله ؛ وهكذا فلكلمتي تابع وتطبيق نفس المعنى ، مع العلم أننا نستعمل عملياً كلمة تطبيق في أغلب الأحيان . وإذا أردنا القول :

ليكن f تطبيقاً لِـ X في Y

فإننا نقول عادة

ليكن تطبيقاً f ، $f: X \to Y$ ،

أو

ليكن تطبيقاً $X \xrightarrow{f} Y$.

وقد يحدث أيضاً أننا نعين التابع f بواسطة «الدستور» الذي يعطي $f(x)$ بدلالة x ؛ وإذا كان $X = Y = \mathbf{R}$ ، فإذا قلنا

ليكن التطبيق $x \mapsto x^3$ لِـ $\mathbf{R}$ في $\mathbf{R}$ ،

أو إذا قلنا

ليكن التابع x^3 المعرّف على $\mathbf{R}$

فإننا نعني بذلك

ليكن التطبيق f لِـ $\mathbf{R}$ في $\mathbf{R}$ بحيث $f(x) = x^3$ من أجل كل $x \in \mathbf{R}$ ؛

وبصورة أدق ،

ليكن التطبيق $f = (G, \mathbf{R}, \mathbf{R})$ حيث G هي مجموعة الأزواج $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ بحيث

$y = x^3$.

نعتبر الآن تطبيقين

$f = (G, X, Y)$ و $f' = (G', X', Y')$.

وحسب تعريف تساوي الثلاثيات ، فإن العلاقة $f = f'$ تعني

$G = G'$ ، $X = X'$ ، $Y = Y'$ ؛

وبما أن $X = pr_1(G)$ و $X' = pr_1(G')$ فإن $X = X'$ تنتج عن $G = G'$ ،

وإذا كان لدينا من جهة أخرى $X = X'$ و $Y = Y'$ ، فإن الحصول على $G = G'$ (أي $f = f'$) يكون ناتجاً عن كتابة

$f(x) = f'(x)$ مهما كان $x \in X$ ،

إذ أن G مؤلفة من الأزواج $(x, f(x))$ و G' من الأزواج $(x, f'(x))$ حيث $x \in X$.

ملاحظة 2 – قد يعتقد بعض المبتدئين أن كل تابع هو معرف بواسطة **«دستور» يسمح حساب** $f(x)$ **بدلالة** x. وهذا ما يعطي فكرة خاطئة عن مفهوم التابع.

إن كلمة دستور لا تعني شيئاً إن لم نعطها تعريفاً دقيقاً. وإذا كان بعض المبتدئين يعتبرونها عمليات جبرية متتالية فإن ذلك لا يكون ممكناً إذا كان x عنصراً من مجموعة كيفية. أما إذا كان x عدداً حقيقياً، فإن التوابع التي يمكن الحصول عليها بواسطة «دساتير» هي توابع خاصة جداً، الأمر الذي أدّى إلى التخلي عن تعريف التابع بهذه الطريقة منذ أكثر من 200 عام؛ وكانت احتياجات التحليل في الواقع قد فرضت إنشاء أصناف جديدة من التوابع، وأدت دراستها في ما بعد إلى اختراع نظرية المجموعات ثم نظرية التكامل الحديثة، وبتعميم مفهوم التابع أكثر فأكثر، أمكن إنشاء جزء هاماً من الرياضيات المعاصرة.

ومع هذا توجد أهمية في دراسة التوابع المعرّفة بواسطة «دساتير جبرية»؛ وهي من مواضيع فرع هام من الرياضيات (الهندسة الجبرية)، وهو من الفروع الأكثر دراسة حالياً.

ملاحظة 3 – إذا كانت X و Y مجموعتين، فإن تطبيقات X في Y هي عناصر مجموعة يرمز لها

$$Y^X$$

وتسمى **مجموعة تطبيقات** X في Y؛ وبما أن كل تابع هو ثلاثية $f = (G, X, Y)$ حيث $G \subset X \times Y$، فإن مجموعة تطبيقات X في Y محتواة في:

$$P(X \times Y) \times \{X\} \times \{Y\}.$$

ومن الناحية العملية، إذا كان لدينا مجموعتين X و Y، فإننا لا نفرّق بين تطبيق لـX في Y وبيانه G؛ وحسب هذا الاصطلاح تبدو مجموعة تطبيقات X في Y وكأنها جزء من $P(X \times Y)$.

ملاحظة 4 - نستعمل كثيراً مفهوم الجماعة أو العائلة وهو قريب من مفهوم التابع ويكون تعريفه على النحو التالي : لتكن I مجموعة ؛ ومن أجل كل $i \in I$ نعتبر كائناً متعلقاً بـ i (دون أن نوضح مسبقاً في أية مجموعة تؤخذ هذه الكائنات المتعلقة بعناصر i) ، وإذا رمزنا بـ x_i للكائن المتعلق بـ i ، فإن هذه الكائنات تؤلف **جماعة ذات أدلّة في** I ، ونرمز لها عادة

$$(x_i)_{i \in I} \cdot$$

ومن وجهة نظر رياضية فإن كل جماعة ذات أدلّة في I هي بيان G يحقق الخاصتين التاليتين : $I = pr_1(G)$ ومن أجل كل $i \in I$ فإنه يوجد $z \in G$ وحيداً بحيث $pr_1(z) = i$ ؛ وإذا وضعنا $z = (i, x_i)$ فإننا نحصل على التعريف الحدسي السابق .

لتكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة ، إذا كان لدينا $x_i \in X$ من أجل كل $i \in I$ فإننا نقول عن $(x_i)_{i \in I}$ أنها جماعة من عناصر المجموعة X ؛ ويمكن دوماً الحصول على مجموعة X من هذا الصنف ، إذ يكفي أخذ المجموعة $pr_2(G)$ ، حيث G هو بيان الجماعة المعتبرة . ونقول أيضاً عن جماعة $(A_i)_{i \in I}$ أنها **جماعة من أجزاء مجموعة** X إذا كان $A_i \subset X$ مهما كان $i \in I$.

إذا كانت لدينا جماعة ذات أدلة في I ، حيث I مؤلفة من الأعداد الطبيعية 1 ، 2 ، . . . ، فإن هذه الجماعة تسمى متتالية ؛ وفي أغلب الأحيان نرمز للمتتاليات بالكتابة

$$(x_n)_{n \geq 1} ؛$$

وهكذا عندما نريد الحصول على متتالية من عناصر مجموعة X ، فإن ذلك يعود إلى اختيار عناصر

$$x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n ، . . .$$

من X ، وهذا يعود إلى اعتبار تطبيق $n \to x_n$ لمجموعة الأعداد الطبيعية في المجموعة X .

إن التعريف السابق يفترض وجود مجموعة مؤلفة من الأعداد الطبيعية (يرمز لها عادة **N**) . وطالما تعلق الأمر بتعاريف حدسية لمفهوم المجموعة أو

مفهوم العدد الطبيعي فإن وجود N بديهي ؛ أما إذا أردنا إنشاء المجموعة N بطريقة رياضية بحتة فهذه مسألة أخرى ، إذ أنه لا يكفي إنشاء نظرية رياضية دقيقة وخاصة بالأعداد الطبيعية ، بل ينبغي أيضاً أن نقبل وجود مجموعات عدد عناصرها غير منته ، وعلى الرغم من أن وجود هذه المجموعات يبدو بديهياً ، إلاّ أنه لا يمكن برهانه - وهذه إحدى المسلّمات في الرياضيات .

4. الصور المباشرة والصور العكسية

ليكن f تطبيقاً لمجموعة X في مجموعة Y ؛ إذا اعتبرنا جزء A من X فإن **صورة** A **وفق** f هي بالتعريف المجموعة المؤلفة من العناصر $y \in Y$ التي تحقق الخاصة التالية :

يوجد $x \in A$ بحيث $y = f(x)$.

وإذا اقتصر A على عنصر وحيد x ، فإن صورته تكون مقتصرة على العنصر $f(x)$. أما إذا كان A جزء كيفياً من X فإننا نرمز بـ$f(A)$ لصورة A (وهذا مجرد اصطلاح لأن $f(A)$ لا يكون لها معنى إلاّ إذا كان $A \in X$) .
ومن الواضح أن

$$f(\Phi) = \Phi$$

مهما كان التطبيق f .

نعتبر دائماً تطبيقاً $f : X \to Y$ ، وليكن B جزء من Y ؛ إن **الصورة العكسية** لـB وفق f هي بالتعريف مجموعة العناصر $x \in X$ التي تحقق $f(x) \in B$ ؛ ونعين هذه المجموعة بالرّمز

$$. f^{-1}(B)$$

من الواضح أن

$A \subset f^{-1}(f(A))$ من أجل كل جزء A من X

$B \supset f(f^{-1}(B))$ من أجل كل جزء B من Y

ولا يمكن، في الحالتين، تغيير علاقة الاحتواء بعلاقة مساواة.

نقول عن تطبيق $f: X \to Y$ أنه **ثابت في جزء** A من X إذا كانت المجموعة $f(A)$ مؤلفة من عنصر وحيد (ف 1، نظرية 6)، أي إذا كان لدينا

$f(x') = f(x'')$ من أجل كل $x' \in A$ وكل $x'' \in A$.

وإذا كان f ثابتاً في X كلها، فنقول عن f أنه **تطبيق ثابت**.

ليكن f تطبيقاً لمجموعة X في نفسها؛ نقول عن جزء A من X أنه **مستقر بـ** f، أو وفق f، إذا كان لدينا $f(A) \subset A$، وبتعبير آخر إذا كانت العلاقة $x \in A$ تستلزم العلاقة $f(x) \in A$.
وإذا اقتصر A على عنصر وحيد x، فإن ذلك يعني

$$f(x) = x$$

ونقول عندئذٍ عن x أنها **نقطة ثابتة أو** مستقرة وفق f.

في الهندسة الابتدائية، يظهر مفهوم صورة مجموعة وفق تطبيق، عندما نتحدث مثلاً عن «متحول أو صورة مستقيم وفق دوران»: فالمستقيم هو مجموعة (نقط)، والدوران هو تطبيق ما (لمجموعة نقط الفراغ في نفسها).

5. اقتصار وتمديد التوابع

ليكن $f = (G, X, Y)$ تابعاً، و X' جزء من X. لتكن G' مجموعة العناصر $z \in G$ التي تحقق $pr_1(z) \in X'$؛ عندئذٍ تكون الثلاثية $f = (G', X', Y)$ تابعاً - إذ أن $G' \subset X' \times Y$ ومهما كان $x \in X'$ فإنه يوجد عنصر وحيد $z' \in G'$ بحيث $pr_1(z) = x$، ألا وهو العنصر $z = (x, f(x))$.
هذا وإن التابع f'، وهو تطبيق لـ X' في Y بحيث

$f(x) = f'(x)$ مهما كان $x \in x'$،

يسمى **اقتصار** f على X'.

ملاحظة 5 - في أغلب الأحيان، نعين اقتصار f على X' بالرّمز

$f' = f/_{X'}$ أو $f' = f_{X'}$.

ومن جهة أخرى إذا كان لدينا تطبيقان f و g، بحيث تحتوي مجموعتا انطلاقهما جزء مشتركا X، نقول عن f و g أنهما متطابقان على X إذا كان لدينا

$f(x) = g(x)$ من أجل كل $x \in X$ ؛

ويكون ذلك محققاً إذا كان: $f/_X = g/_X$ على سبيل المثال، لكن العكس ليس صحيحاً تماماً على الرغم مما يبدو . . .

إذا كان $f = (G, X, Y)$ و $f'(G', X', Y')$ تطبيقين، فإننا نقول عن f أنه **تمديد** لِـ f' إذا تحققت العلاقات

$X' \subset X$ ، $Y' \subset Y$ و $f(x) = f'(x)$ مهما كان $x \in X'$.

ويحدث ذلك مثلاً إذا كان f' هو اقتصار f على جزء من X . ونشير إلى النتيجة التالية: إذا كان لدينا ثلاثة مجموعات X' و X و Y ؛ حيث $X' \subset X$ ، و f تطبيق لِـ X' في Y ، وإذا كانت Y غير خالية، فإنه يوجد تطبيق لِـ X في Y يمدد f. لأجل إنشاء تطبيق $g: X \to Y$ ممدد لِـ f، نقوم باختيار عنصر من Y ، ليكن c، ثم نضع

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا كان } x \in X' \\ c & \text{إذا كان } x \notin X' . \end{cases}$$

وتوجد، بطبيعة الحال، طرق أخرى لتمديد f، لكن الطريقة السابقة هي أبسطها .

6. التطبيقات المركّبة

نعتبر ثلاثة مجموعات X و Y و Z ، وليكن تطبيقان

$f = (G, X, Y)$ و $g = (H, Y, Z)$

أولهما لـ X في Y وثانيهما لِـ Y في Z . نريد الحصول على تطبيق ثالث لِـ X في Z

$$h = (K, X, Z)$$

وذلك بوضع

$$h(x) = g(f(x))$$ ، من أجل كل $x \in X$ ؛

من الواضح أن بيان h ، وهو K ، يتألف من الأزواج (x, z) التي لها الخاصة التالية : يوجد $y \in Y$ بحيث $(x, y) \in G$ و $(y, z) \in H$.

ونعين التطبيق h بالرّمز

$$h = g \circ f$$

ونسميه **تركيب**، **أو مركّب**، التطبيقين f و g ؛ ولا يمكن تعريف التطبيق المركب $g \circ f$ إلا عندما تكون مجموعة وصول f هي مجموعة انطلاق g .

ملاحظة 6 - إن مفهوم التطبيق المركّب يعوّض حالياً مفهوم «تابع التابع» أو «جداء تحويلين» الذين كانا يستعملا في بعض الحالات الخاصة. لنأخذ مثلاً $X = Y = Z = \mathbf{R}$ ، حيث $\mathbf{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية، و $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sin x$ ؛

عندئذٍ يكون $g \circ f$ هو التابع

$$x \mapsto \sin(x^2)$$ ،

أما $f \circ g$ فيكون

$$x \mapsto (\sin x)^2$$ ،

وهذا يثبت، اعتراضاً، أن $f \circ g \neq g \circ f$ في الحالة العامة (حيث يكون الطرفان معرّفين) . وإذا أخذنا $X = Y = Z =$ الفراغ (حسب مفهوم «هندسة الفضاء» - ولا نريد اعطاء تعريف دقيق لذلك) ، فإنه يمكن أخذ f و g في مجموعة «التحويلات» حسب المفهوم الهندسي - دورانات، انسحابات، تحاكيات . . . ؛ وعند ذلك فإن التطبيق المركب $g \circ f$ يكون «جداء التحويل f مع التحويل g» كما هو معرّف في الهندسة الابتدائية .

نبرهن الآن نظرية تكون لها أهمية في ما بعد :

نظرية 1 - لتكن X و Y و Z ثلاثة مجموعات، ولنعتبر تطبيقين

$$h : X \to Z,\ f : X \to Y$$ ،

إن الشرطين التاليين متكافئان :

أ) يوجد تطبيق

$$g : Y \to Z$$

بحيث $h = g \circ f$ ؛

ب) من أجل كل x' و x'' من X ، فإن العلاقة

$$f(x') = f(x')$$

تستلزم العلاقة

$$h(x') = h(x'')$$.

إذا كان أ) محققاً فإنه يكون لدينا

$$h(x') = g(f(x') = g(f(x'')) = h(x'')$$.

لنبرهن الآن أن ب) يستلزم أ) .

نبدأ بدراسة الحالة الخاصة التي يكون فيها $f(X) = Y$. وللحصول على ذلك نقوم بإنشاء بيانه $G \subset Y \times Z$ ، على النحو التالي : G هي مجموعة الأزواج (y, z) بحيث يوجد على الأقل $x \in X$ يحقق

$$z = h(x) \ ، \ y = f(x)$$.

[من الطبيعي إنشاء G **بهذه الطريقة**، إذ أنه إذا افترضنا المسألة محلولة فإن G هي مجموعة الأزواج $(y, g(y))$ ؛ وبما أن $f(X) = Y$ ، فإنه يمكن كتابة $y = f(x)$ ، ومنها نحصل على $g(y) = g(f(x)) = h(x)$ ، بحيث تتألف G من الأزواج $(f(x), h(x))$ مهما كان x في X] . لنبرهن أن المجموعة G التي نحصل عليها هي فعلاً بيان تطبيق $g : Y \to Z$ بحيث $h = g \circ f$. ولإثبات أن G هي بيان تابع، ينبغي أن نبرهن أنه من أجل كل $y \in Y$ ، يوجد عنصر وحيد

$z \in Z$ بحيث $(y, z) \in G$ ؛ إذ أخذنا $x \in X$ بحيث $y = f(x)$ و $z = h(x)$ فإن z يحقق الخاصة المذكورة ؛ ومن جهة أخرى إذا كان (y, z') و (y, z'') ينتميان إلى G ، فإنه يوجد في X عنصران x' و x'' بحيث

$$y = f(x') \quad ، \quad z' = h(x') \text{ ،}$$
$$y = f(x'') \quad ، \quad z'' = h(x'') \text{ ؛}$$

وبالتالي $f(x') = f(x'')$ ، وحسب ب) فإن $h(x') = h(x'')$: أي $z' = z''$ ، وهذا يثبت أن G هو بيان تطبيق g لِـY في Z . ولبرهان $h = g \circ f$ ، نعتبر عنصرا $x \in X$ ؛ حسب إنشاء G ، فإن هذه الأخيرة تحتوي الزوج $(f(x), h(x))$ ؛ وبالتالي $h(x) = g(f(x))$ ، مما يثبت صحة العلاقة المطلوبة .

بقي لنا أن نثبت أن ب) تستلزم أ) في الحالة العامة . لنضع $f(Y) = Y'$ ونعتبر التطبيق $f' : X \to Y'$ المعرّف بِـ$f'(x) = f(x)$ من أجل $x \in X$ ؛ وإذا عوّضنا X ، Y ، Z ، f ، h بِـX ، Y' ، Z ، f' ، h فإننا نحصل على الافتراض ب) في حالة $f'(X) = Y'$ ؛ وحسب ما أثبتنا آنفاً : فإنه يوجد تطبيق $g' : Y' \to Z$ بحيث $h = g' \circ f'$ ؛ عندئذٍ نمدد g' إلى تطبيق $g : Y \to Z$ (وهذا ممكن كما رأينا في رقم 5) ؛ ويكون لدينا من أجل كل $x \in X$

$$h(x) = g'(f'(x)) = g \cdot (f'(x)) = g(f(x))$$

وبالتالي $h = g \circ f$ ، وبهذا ينتهي البرهان .

يمكن تفسير النظرية 1 «حدسياً» على النحو التالي : بما أن العلاقة $f(x') = f(x'')$ تستلزم $h(x') = h(x'')$ فإنه يكفي ، لحساب $h(x)$ ، معرفة $f(x)$ بحيث يكون $h(x)$ تابعاً لِـ$f(x)$. لكن هذا النوع من التفسير لا يعوض بطبيعة الحال البرهان الذي رأيناه .

إن أهم خواص عملية تركيب التطبيقات هي خاصة «التجميع» التي تعبّر عنها النتيجة التالية

نظرية 2 – مهما كانت التطبيقات

$$f : X \to Y \text{ ، } g : Y \to Z \text{ ، } h : Z \to T \text{ ،}$$

تكون العلاقة التالية محققة :

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f \ .$$

نضع $g\circ f = u$ و $h\circ g = v$ ؛ من أجل كل $x \in X$ فإن قيمة الطرف الأيسر للعلاقة التي نريد إثباتها ، في x هي $h\big(g\,(f(x))\big) = h\big(u(x)\big)$ ، وقيمة الطرف الأيمن هي $h\big(g\,(f(x))\big) = v(f(x))$ وبالتالي فإن العلاقة محققة .

إن النظرية 2 تسمح لنا تعريف $h\circ g\circ f$ دون التباس ، وتسمح بصفة أعم تعريف عبارات من الصنف

$$f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$$

على شرط أن يكون للعبارات المذكورة معنى ، أي أن تكون مجموعة انطلاق f_i هي مجموعة وصول f_{i+1} ، $1 \leq i \leq n-1$. وبصفة خاصة ، إذا كان $u : X \to X$ ، وإذا كان p عدداً طبيعياً أكبر من 1 فإنه يمكن تعريف

$$u^p = \underbrace{u o\, u o \ldots o u}_{\text{p مرّة}}$$

7. التطبيقات المتباينة

نقول عن تطبيق $f : x \to Y$ أنه **متباين** إذا تحققت العلاقة التالية من أجل كل x' و x'' في X :

$$f(x') = f(x'') \text{ تستلزم } x' = x''$$

أو العلاقة

$$x' \neq x' \text{ تستلزم } f(x') \neq f(x'') \ .$$

ونقول أيضاً عن تطبيق متباين أنه تباين .

مثال 1 - نأخذ $X = Y = \mathbf{R}$ و $f(x) = x^3$ ؛ f متباين لأنه إذا كان x و y عددين حقيقيين ، فإن العلاقة $x^3 = y^3$ تستلزم $x = y$. أما التطبيق $f(x) = x^2$ فهو ليس متبايناً لأن $f(1) = f(-1)$ على سبيل المثال .

مثال 2 - من أجل كل مجموعة X ، نعرّف **التطبيق المطابق لِـX في X** ، ونرمز له j_X، كما يلي

$$j_X : X \to x.$$

حيث $j_X(x) = x$ مهما كان $x \in X$ (نستعمل في بعض الأحيان الرّمز id عوضاً عن j_X) . من الواضح أن j_X متباين .

ونشير إلى أن بيان j_X هو جزء من $X \times X$ مؤلف من الأزواج (x, x) حيث $x \in X$ ، وهذا الجزء يدعى قطر الجداء $X \times X$.

وإذا كان $\mathbf{X} = \mathbf{R}$ ، فإن التطبيق المطابق هو «التابع x» المدروس في التعليم المتوسط والثانوي . وإذا كانت X هي مجموعة نقط المستوى أو الفضاء فإن التطبيق المطابق هو ما يسمى في الهندسة الابتدائية «التحويل الواحدي» .

مثال 3 - لتكن X .و Y مجموعتين بحيث $X \subset Y$ ؛ إن التطبيق $j : X \to Y$ ، المعرف بِـ $j(x) = x$ من أجل كل $x \in X$ ، هو متباين بطبيعة الحال ؛ ويدعى **التباين القانوني لِـX في Y** (توجد بصفة عامة تباينات عديدة لِـX في Y ؛ وصفة قانوني تعني هنا أننا نحصل على هذا التباين بطريقة «طبيعية» لا يدخل فيها أي عنصر كيفي .

نظرية 3 - لتكن X و Y مجموعتين غير خاليتين و f تطبيقاً لِـX في Y . إن الخاصتين التاليتين متكافئتان

أ) f متباين ؛

ب) يوجد $g : Y \to X$ بحيث يكون $g \circ f$ هو التطبيق المطابق لِـX في X .

لنعتبر التطبيقين

$$f : X \to Y \text{ و } j_X : X \to X ;$$

ونبحث عن شرط لازم وكاف لوجود تطبيق $g : Y \rightarrow X$ بحيث $j_X = g \circ f$ ؛ وهذا الشرط معطى في النظرية 1 من رقم 6: وهو أن العلاقة

$$f(x') = f(x'') \text{ تستلزم } j_X(x') = j_X(x'') \text{ ، أي } x' = x'' \text{ ،}$$

وهذا يعني أن f متباين؛ ومنه نحصل على النظرية.

مثال 4 - نأخذ $X = \mathbf{R}_+$ ، مجموعة الأعداد الحقيقية $x \leq 0$ ، و $Y = \mathbf{R}$ ، مجموعة كل الأعداد الحقيقية (ذات إشارة كيفية) ؛ ونأخذ أخيراً $f(x) = x^2$ ؛ ومن الواضح أن هذا التطبيق متباين (ونشير أن ذلك لا يكون محققاً إذا أخذنا $\mathbf{R}$ عوضاً عن $\mathbf{R}_+$) ؛ يوجد إذن تطبيق $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ بحيث يكون $g \circ f$ هو التطبيق المطابق، أي أن $g(x^2) = x$ مهما كان $x \in \mathbf{R}_+$. ومن الواضح أن ذلك يعني

$$g(y) = \sqrt{y} \text{ إذا كان } y \geq 0 \text{ .}$$

وبتعبير آخر فإن g هي أي تابع بقيم موجبة، يطابق $\sqrt{y}$ من أجل كل $y \geq 0$.

ونشير إلى أنه يمكن برهان النظرية 3 مباشرة ودون الاعتماد على النظرية 1 . وينبغي أن يحقق التطبيق المطلوب g ، العلاقة $g(f(x)) = x$ ؛ وبما أن ذلك هو الشرط الوحيد الذي يجب أن يحققه g ، فإنه يمكن اختيار $g(y)$ بصورة كيفية عندما يكون $y \notin f(X)$ ؛ أما إذا كان $y \in f(X)$ فإنه يوجد $x \in X$ وحيد (إذ أن f متباين) بحيث $y = f(x)$ ، ونأخذ $g(y) = x$.

8. التطبيقات الغامرة والمتقابلة

نقول عن تطبيق $f : X \rightarrow Y$ أنه غامر إذا كان لدينا $Y = f(X)$ ، وبعبارة أخرى إذا وجد من أجل كل $y \in Y$ عنصر $x \in X$ على الأقل بحيث $y = f(x)$. وقولنا أن f متباين يعني أنه من أجل كل $y \in Y$ يوجد على الأكثر عنصر $x \in X$. بحيث $y = f(x)$.

نقول عن تطبيق $f:X\to Y$ أنه **متقابل** إذا كان متبايناً وغامراً، أي أنه يوجد من أجل كل $y\in Y$ عنصر $x\in X$ وحيد بحيث $y=f(x)$.

من الواضح على سبيل المثال أنه مهما كانت المجموعة X فإن التطبيق المطابق j_X متقابل.

هذا وإن كل تطبيق متقابل يسمى أيضاً **تقابل**. ونسمي **تبديل** X كل تقابل لِـ X. في X. ونعيّن مجموعة تباديل X بالرّمز

$$\sigma(X) \text{ أو } \mathcal{G}(X)$$

وإذا كان $X=\{1, 2, ..., n\}$ فإننا نكتب $\mathcal{G}_n$ أو σ_n عوضاً عن $\mathcal{G}(X)$.

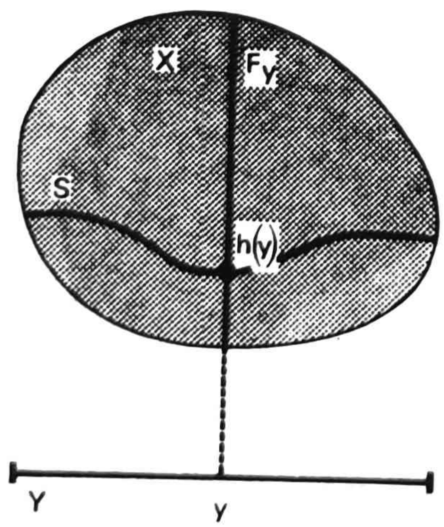
ملاحظة 6 - في بعض المصطلحات القديمة، يقال «ليكن f تطبيقاً لِـ X على Y» بدلاً عن «ليكن f تطبيقاً غامراً لِـ X في Y».

نظرية 4 - ليكن $f: X\to Y$ تطبيقاً. إن الشرطين التاليين متكافئان:

أ) f غامر

ب) يوجد تطبيق $h: Y\to X$ بحيث يكون $f\circ h=j_Y$ حيث j_Y هو التطبيق المطابق لِـ Y.

إذا تحقق ب) فإنه يكون لدينا $y=f(h(y))$ من أجل كل $y\in Y$، وبالتالي فإن كل $y\in Y$ يكون على الصورة $f(x)$، ومنه فإن f غامر.



نفترض عكسياً أن f غامر؛ ومن أجل كل $y \in Y$ نرمز بـ F_y لمجموعة العناصر $x \in X$ بحيث $y = f(x)$؛ وهو جزء من X غير خال؛ ولأجل إنشاء التطبيق h المطلوب، فإنه يكفي اختيار عنصر من كل مجموعة F_y بصورة كيفية؛ وإذا كان $h(y)$ هذا العنصر فإننا نكون قد عرّفنا تطبيقا $h : Y \to X$ بحيث $f(h(y)) = y$ مهما كان $y \in Y$، وبذلك ينتهي البرهان.

ملاحظة 7 – يبدو الجزء الثاني من البرهان السابق سليماً وبديهياً بالنسبة للمبتدئ؛ غير أنه ليس كاملاً من الناحية الرياضية (لا يمكن أن نتصور آلة براهين تقوم «باختيار» عنصر من كل F_y بطريقة كيفية) –. أما البرهان السليم فيمكن الحصول عليه بواسطة عملية هيلبارت (ف 0، رقم 9)؛ ونحصل على تابع h، عندما نضع

$$. h(y) \,!= \tau_x\big(f(x) = y\big)$$

ونشير أيضاً إلى أن المسألة ترجع إلى إنشاء جزء S من X بحيث، مهما كان $y \in Y$، يكون التقاطع $S \cap F_y$ مؤلفاً من عنصر وحيد (وعند ذلك نستطيع أن نسمي $h(y)$ هذا العنصر). إن إمكانية انشاء هذه المجموعة S (وهو بديهي إذا استعملنا عملية هيلبارت) هي من مبادئ الرياضيات وتعرف بمُسَلَّمة الاختيار. وإلى تاريخ قريب، تشكك بعض الرياضيين حول صحة هذه المُسَلَّمة، ولكن في سنة 1939 تم برهان كونها غير متناقضة مع المسلمات الأخرى (Godel 1939)، ثم تمكن P. Cohen سنة 1963 أن يبرهن أنها مستقلة منطقياً عن المسلمات الأخرى. وتتعلق هذه البراهين طبعاً بمبادئ رياضية مناسبة.

ملاحظة 8 – إن التطبيق h الذي تؤكد وجوده النظرية 4 ليس بالضرورة وحيداً. نأخذ مثلاً $X = \mathbf{R}$، $Y = \mathbf{R}_+$ و $f(x) = x^2$، بحيث يكون f غامراً (كل عدد حقيقي موجب يقبل جذراً تربيعياً). ومن جملة الإمكانيات، لدينا التوابع h التالية

$h_1(y) = +\sqrt{y}$ مهما كان $0 \le y$؛

$h_2(y) = -\sqrt{y}$ مهما كان $0 \le y$؛

$$h_3(y) = \begin{cases} +\sqrt{y} & \text{إذا كان } 0 \le y \text{ ناطقاً ،} \\ -\sqrt{y} & \text{إذا كان } 0 \le y \text{ غير ناطق .} \end{cases}$$

هذا وأنه لا يمكن عملياً إعطاء رسم بياني للتابع h_3 ؛ ومع هذا فإن h_3 من وجهة النظر الرياضية لا يقل أهمية عن h_1 و h_2 .

نظرية 5 – ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً . إن الشرطين التاليين متكافئان

أ) f تقابل

ب) يوجد تطبيقان $g: Y \to X$ و $h: Y \to X$ بحيث

$$g \circ f = j_X \quad \text{و} \quad f \circ h = j_Y$$

وإذا تحقق الشرطان فإن g و h يكونا وحيدين ويحققان $g = h$.

ينتج التكافؤ بين أ) و ب) عن النظريتين 3 و 4 ، إذ إن «تقابل» يعني «تباين وغامر» . لأجل اثبات وجود تابع g وحيد وتابع h وحيد ، و $g = h$ ، فإنه يكفي إثبات أن كل تابع g يساوي كل تابع h . ولكن ، حسب النظرية 2 ، لدينا العلاقة

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) ،$$

التي تكتب أيضاً على النحو $j_X \circ h = g \circ j_Y$ ؛ ومن الواضح أن

$$g \circ j_Y = g \text{ ، } j_X \circ h = h \text{ ،}$$

وبهذا ينتهي البرهان .

ليكن $f: X \to Y$ تقابلا ؛ يوجد تطبيق $g: Y \to X$ وحيد بحيث يكون لدينا

$$g \circ f = j_X \text{ ، } f \circ g = j_Y \text{ ؛}$$

وبعبارة أخرى

$$g(f(x))\ x \text{ ، } f(g(y)) = y \text{ .}$$

ونقول عن g أنه **التطبيق العكسي لِـ** f ونرمز له

f^{-1}

ومن الواضح أنه من أجل كل $x \in X$ وكل $y \in Y$ ، تكون العلاقتان

$$x = f^{-1}(y) \text{ و } y = f(x)$$

متكافئتين ، وإنه إذا كان $G \subset X \times Y$ هو بيان f ، فإن بيان f^{-1} يكون مؤلفاً من الأزواج (y, x) حيث $(x, y) \in G$

ملاحظة 9 - إذا أخذنا $X = Y = \mathbf{R}$ و $f(x) = x$ فإن التطبيق العكسي لِـ f هو f نفسه **(وبصورة عامة فإن كل تطبيق مطابق يكون مساوياً لتطبيقه العكسي)** . على أننا نقول في بعض الأحيان أن التابع $\frac{1}{x}$ هو التابع العكسي للتابع x . وحتى نتجنب هذا الالتباس فمن الأفضل أن نقول عن التابع $\frac{1}{x}$ أنه **مقلوب** التابع x .

ويرى هنا القارئ المبتدئ أن للغة أهمية كبرى في الرياضيات ، وينبغي معرفة دقيقية للعبارات التقنية حتى يمكن استعمالها بمفهومها البحت ، وأن هذا ضروري لفهم الرياضيات .

نظرية 6 - ليكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ تطبيقين ؛ إذا كان f و g متباينين (أو غامرين) فإن $g \circ f$ تكون كذلك ؛ إذا كان f و g تقابلين فإن $g \circ f$ يكون كذلك وعندئذٍ

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-s} \ .$$

أخيراً ، إذا كان f تقابلاً فإن f^{-1} يكون كذلك ، وعندئذٍ

$$(f^{-1})^{-1} = f \ .$$

إذا كان f و g تباينين ، فإن العلاقة $g(f(x')) = g(f(x''))$ تستلزم $f(x') = f(x'')$ لأن g تباين ، وبالتالي $x = x''$ لأن f تباين ؛ وهذا ما يثبت أن $g \circ f$ تباين . إذا كان التطبيقان f و g غامرين ، فإنه يوجد من أجل كل $z \in Z$ عنصر $y \in Y$ بحيث $z = g(y)$ ، كما يوجد $x \in X$ بحيث $y = f(x)$ ، ومنه $z = g(f(x))$ ؛ وهذا ما يثبت أن $g \circ f$ غامر .

إذا كان f و g تقابلين، فإن $g\circ f$ هو أيضاً تقابل حسب ما سبق؛ ولدينا، بالإضافة إلى ذلك

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}\circ j_Y \circ f = f^{-1}\circ f = j_X$$

مما يثبت أن التطبيق العكسي لِـ$g\circ f$ هو $f^{-1}\circ g^{-1}$.

أخيراً، إذا كان f تقابلاً، نرى من الدستورين

$$f\circ f^{-1} = j_Y \text{ و } f^{-1}\circ f = j_X$$

انّ f^{-1} متباين وغامر (إذا طبقنا النظريتين 4 وَ 5 على f^{-1})، وان تطبيقه العكسي هو f؛ وبهذا ينتهي البرهان.

ملاحظة 10 - إن الدستور

$$(g\circ f)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$$

ليس صحيحاً؛ وزيادة على ذلك فإن الطرف الأيمن لا يكون له معنى الاّ إذا كان $Y = Z$ (وحتى في هذه الحالة يكون الدستور غير صحيح).

9. التوابع ذات متحولات متعددة

نسمي **تابعاً لمتحولين اثنين** كل تابع تكون مجموعة انطلاقه هي جداء مجموعتين أو جزء من هذا الجداء. إذا كان f تابعاً لمتحولين اثنين، معرفا على جزء A من جداء $X\times Y$، فإننا نرمز لقيمة f في نقطة (x, y) من A، بالكتابة $f(x, y)$ عوضاً عن $f((x, y))$.

وبطريقة مماثلة، نعرّف التوابع ذات ثلاثة، أو أربعة... متحولات ونستعمل عندئذٍ الرّموز $f(x, y, z)$ $f(x, y, z, t)$، ...

لا يوجد أي فرق من الناحية الرياضية، باستثناء الرّموز المستعملة، بين التوابع ذات متحول وحيد والتوابع ذات متحولات متعددة - ولم نعط في

الفقرة 3 أي شرط حول مجموعات انطلاق التوابع، وكل ما نقوله في هذا الفصل يبقى صحيحاً من أجل التوابع ذات متحولات متعددة. وقد كانت كلمة «متحول» تعني ما نسميه الآن «متحول حقيقي»، و«التوابع ذات متحول واحد» هي المعرّفة على جزء من $\mathbf{R}$، مجموعة الأعداد الحقيقية، بينما «التوابع ذات ثلاثة متحولات»، مثلاً، هي التوابع المعرّفة على جزء من $\mathbf{R}^3$. وحتى نتجنّب التمييز بين هذه الحالات، أعطينا في الفقرة 3 تعريفاً يضم كل مفاهيم التوابع المعروفة حاليًا.

ونعتبر كثيراً، في المجال العملي، توابعا مجموعات انطلاقها ومجموعات وصولها تكون جداء. لنعتبر مثلاً تطبيقاً

$$f : X \times Y \to U \times V \times W$$

حيث X، Y، U، V، W هي مجموعات كيفية. لنعتبر تطبيقات الاسقاط

$$pr_1 : U \times V \times W \to U$$

$$pr_2 : U \times V \times W \to V$$

$$pr_3 : U \times V \times W \to W \text{ ؛}$$

ومن الواضح أن

$$z = (pr_1(z), pr_2(z), pr_3(z)) \text{ من أجل كل } z \in U \times V \times W \text{ ،}$$

حسب تعريف توابع الإسقاط. لنعتبر التطبيقات

$$f_1 = pr_1 \circ f : X \times Y \to U \text{ ،}$$

$$f_2 = pr_2 \circ f : X \times Y \to V \text{ ،}$$

$$f_3 = pr_3 \circ f : X \times Y \to W \text{ ،}$$

ويكون لدينا عندئذٍ

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

من أجل كل $x \in X$ و $y \in Y$. وهكذا فإن الشرط اللازم والكافي لإنشاء f هو معرفة التوابع f_1 و f_2 و f_3 المعرّفة في $X \times Y$ والتي تأخذ قيمها في U و V و W على التوالي ونكتب عملياً

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

(رغم أن هذه الكتابة تناقض المعنى الذي اعطيناه للثلاثية ، فإن هذا التناقض «غير هام») .

مثال 5 - لتكن X و Y مجموعتين ، ونعتبر التطبيق

$$f: X\times Y \rightarrow Y\times X$$

المعرّف بِـ

$$f(x, y) = (y, x)\,;$$

ومن الواضح أنه تقابل ، وتطبيقه العكسي هو $(y, x)\mapsto(x, y)$. ونقول عن f أنه التقابل القانوني من $X\times Y$ في $Y\times X$. إذا كان $X = Y = \mathbf{R}$ ، فإن f يكون «التناظر بالنسبة للقطر الأول» .

مثال 6 - لتكن X و Y و Z ثلاثة مجموعات ؛ إن التطبيق

$$f: X\times (Y\times Z)\rightarrow (X\times Y)\times Z$$

المعرّف بالدستور

$$f[(x, (y, z))] = ((x, y), z) \text{ ، }$$

تقابل ؛ ونسميه التقابل القانوني من $X x (Y\times Z)$ في $(A\times Y) x Z$ ؛ وكما قلنا في الفقرة 2 فإننا لا نميّز بين $((x, y), z)$ وَ $(x, (y, z))$ من الناحية العملية .

ف 3. الاتحادات والتقاطعات

1. اتحاد وتقاطع مجموعتين

لتكن X وَ Y مجموعتين؛ نسمي **تقاطع** X وَ Y المجموعة التي نرمز لها

$$X \cap Y$$

والمعرّفة كما يلي: إن العلاقة $z \in X \cap Y$ تكافئ ربط العلاقتين

$z \in X$ وَ $z \in Y$ ؛

أي إن $X \cap Y$ هي المجموعة المؤلفة من الكائنات المنتمية إلى X وإلى Y في آن واحد. ونسمي من جهة أخرى **اتحاد** X وَ Y المجموعة التي نرمز لها

$$X \cup Y$$

والمعرّفة كما يلي: إن العلاقة $z \in X \cup Y$ تكافئ العلاقة

$z \in X$ أو $z \in Y$ ؛

أي أن $X \cup Y$ مؤلفة من الكائنات المنتمية إلى X أو إلى Y أو إلى X وَ Y معاً.

م **ملاحظة 1** – إن وجود مجموعتين $X \cap Y$ وَ $X \cup Y$ قابلتين للخواص المذكورة أمر بديهي من وجهة نظر حدسية، أما من الناحية الرياضية فإنه ليس كذلك. وتحصل على وجود المجموعة $X \cap Y$ بواسطة النظرية 4، ف 1 (نطبقها على X وعلى العلاقة $x \in Y$) أما فيما يخص وجود $X \cup Y$ فإنه يمكن تطبيق النظرية المذكورة إذا كنا نعرف مسبقاً أنه توجد مجموعة تحوي X وَ Y

معاً (نطبق النظرية 4، ف 1 على تلك المجموعة وعلى العلاقة $z \in X$ أو $z \in Y$)؛ لكن وجود مجموعة تحوي X وَ Y معاً هي من المسلمات (أو هي ناتجة عن مُسلّمة أعم، تساعد على إنشاء إتحاد جماعة من المجموعات، أنظر رقم 2)، وهكذا فإننا لن نعطي برهاناً رِيَاضياً لها.

من الواضح أن العلاقات التالية محققة

$$X \cap Y \subset X \subset X \cup Y$$
$$X \cap Y \subset Y \subset X \cup Y \text{ ؛}$$

لتكن Z مجموعة كيفية؛ إن الشرط اللازم والكافي لتكون Z محتواة في X وفي Y هو أن يكون لدينا $z \in X$ وَ $z \in Y$ مهما كان $z \in Z$، أي $z \in X \cap Y$، أي $Z \subset X \cap Y$؛ وهكذا فإن $X \cap Y$ هي أكبر مجموعة محتواة في X وفي Y معاً وبطريقة مماثلة نرى أن الشرط اللازم والكافي لتكون Z حاوية X وَ Y هو أنها تحوي $X \cup Y$، بحيث تكون $X \cup Y$ هي أصغر مجموعة تحتوي X وَ Y معاً.

نقول عن مجموعتين A وَ B أنهما **منفصلتان** إذا كان

$$A \cap B = \Phi$$

أي إذا كانت A وَ B لا تقبلان أيّ عنصر مشترك.

إن قواعد استخدام إشارتي $\cap$ وَ $\cup$ بسيطة جدًّا، وعلى القارئ أن يثبت بنفسه تلك القواعد، وأهمها

$$X \cap Y = Y \cap X \text{ ،} \quad X \cup Y = Y \cup X \text{ ،}$$
$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \quad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \text{ ،}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ ،}$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \text{ ؛}$$
$$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) \text{ حيث } A \subset X \text{ وَ } B \subset A \text{ .}$$

2. اتحاد جماعة من المجموعات (*)

لتكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعة من المجموعات (ف 2، رم 3، ملاحظة 4)؛ إن **اتحاد هذه الجماعة** هو بالتعريف المجموعة A المعرّفة كما يلي: يوجد تكافؤ بين العلاقة $x \in A$ والعلاقة يوجد $i \in I$ بحيث يكون لدينا $x \in A_i$.

إذا كانت I مؤلفة من عنصرين فقط، i وَ j مثلاً، فمن الواضح أن الاتحاد هو المجموعة $A_i \cup A_j$ المعرّفة في الفقرة السابقة.

وإذا كانت I مجموعة كيفية فإن وجود الاتحاد هو مسلّمة في الرياضيات ينبغي قبولها. أما وحدانية الاتحاد (أي أنه توجد مجموعة A على الأكثر بحيث تتمتع A بالخاصة المذكورة) فيمكن البرهان عليها بواسطة نظرية 2، ف 1.

ملاحظة 2 - عندما نتحدث عن جماعة من المجموعات $(A_i)_{i \in I}$، نحن لا نفترض أن كل A_i هي جزء من مجموعة ما غير متعلقة بِـ i؛ على أن وجود الاتحاد يشير إلى صحة ذلك (بل لدينا أكثر من ذلك إذ إن النظرية 4 من ف 1 تنص على أن هناك تكافؤ بين وجود مجموعة تحتوي كل A_i ووجود اتحاد الجماعة $((A_i)_{i \in I})$.

نعين اتحاد جماعة $(A_i)_{i \in I}$ من المجموعة، بالرّمز

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ ؛}$$

وعلى الرغم من كون الحرف i ظاهر في الإشارة السابقة فإن الاتحاد لا يتعلق بِـ i ويمكن تعويض هذا الأخير بأي حرف آخر لم يستعمل في مكان آخر.

نظرية 1 - لتكن A اتحاد جماعة من المجموعات $(A_i)_{i \in I}$، و X مجموعة ما. X تحتوي A إذا وإذا فقط X تحتوي A_i مهما كان $i \in I$.

(*) يمكن إهمال هذه الفقرة في قراءة أولى، أو اعتبارها تمرين

نفترض أن X تحتوي كل A_i ؛ إذا كان $x \in A$ ، فإنه يوجد i بحيث $x \in A_i$ ، وبما أن $A_i \subset X$ فإن $x \in X$ ؛ وبالتالي $A \subset X$. ومن ناحية عكسية ، إذا كانت X تحتوي A ، فمن الواضح أن X تحتوي كل A_i .

نظرية 2 (تجميعية الاتحاد) - لتكن $(A_i)_{i \in I}$ وَ $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعتين من المجموعات ، ونفترض

$$I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \text{ ؛}$$

يكون لدينا عندئذٍ

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{i \in I_\lambda} A_i \right)$$

للبرهان على ذلك ، نضع

$$B_\lambda = \bigcup_{i \in I_\lambda} A_i \text{ ؛}$$

إن الشرط اللازم والكافي لينتمي x إلى اتحاد الجماعة $(A_i)_{i \in I}$ هو وجود $i \in I$ بحيث $x \in A_i$ ؛ وبما أن I هي اتحاد الجماعة I_λ فإن ذلك يعني وجود $\lambda \in \Lambda$ وَ $i \in I_\lambda$ بحيث $x \in A_i$ ، أي أنه يوجد $\lambda \in \Lambda$ بحيث $x \in B_\lambda$ ؛ وبالتالي فإن اتحاد الجماعة $(A_i)_{i \in I}$ هي اتحاد الجماعة $(B_\lambda)_{\lambda\Lambda}$ وهو المطلوب .

ملاحظة 3 - إذا أردنا حساب اتحاد ما ، فإن النظرية 2 تنص على إمكانية تقسيم الاتحاد إلى فروع وتعويض كل فرع باتحاده - .

نظرية 3 - ليكن $f : X \to Y$ تطبيقاً ، وَ $(A_i)_{i \in I}$ جماعة من أجزاء X . يكون لدينا عندئذٍ

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \text{ .}$$

من أجل $y \in Y$. هناك تكافؤ بين

$$y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

ووجود $i \in I$ بحيث $y \in f(A_i)$ ، أي وجود $i \in I$ وَ $x \in A$ بحيث $y = f(x)$. أي وجود x محقق للعلاقتين

$$y = f(x) \text{ وَ } x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ،}$$

وبهذا ينتهي البرهان.

3. تقاطع جماعة من المجموعات

إن **تقاطع جماعة** $(A_i)_{i \in I}$ **غير خالية**(*) **من المجموعات** هو بالتعريف المجموعة A المعرّفة كما يلي: إن العلاقة $x \in A$ تكافئ العلاقة

$$x \in A_i \text{ من أجل كل } i \in I \text{ .}$$

ونعين هذا التقاطع بالرّمز

$$\bigcap_{i \in I} A_i \text{ .}$$

نظرية 4 - لتكن A تقاطع جماعة غير خالية من المجموعات $(A_i)_{i \in I}$. إن الشرط اللازم والكافي لتكون مجموعة X محتواة في A هو أن تكون محتواة في A_i من أجل كل $i \in I$.

إن البرهان على هذه النتيجة مشابه للبرهان على النظرية 1، ونتركه للقارئ كتمرين.

نظرية 5 (تجميعية التقاطع). لتكن $(A_i)_{i \in I}$ وَ $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ جماعتين من المجموعات؛ نفترض أن I وَ Λ وَ I_λ (مهما كان $\lambda \in \Lambda$) غير خالية وأن

$$I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \text{ ؛}$$

عندئذٍ يكون لدينا

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in \Lambda} \left(\bigcap_{i \in I_\lambda} A_i \right)$$

البرهان مشابه لبرهان النظرية 2.

(*) نعني بذلك أن I غير خالية. إذا كانت I خالية، فإن العلاقة «$x \in A$» مهما كان «$i \in I$» تكون محققة من أجل كل x، وبالتالي لا تعرَف مجموعة (وإلا فإن مجموعة المجموعات...).

نظرية 6 - ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ولتكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعة غير خالية من أجزاء X . لدينا عندئذٍ

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)\ ؛$$

وإذا كان f متبايناً، فإنه يكون لدينا

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)\ .$$

إذا كان $x \in A_i$ مهما كان i ، فإن $f(x) \in f(A_i)$ من أجل كل i ، وهذا يثبت الجزء الأول من النظرية. لنفترض الآن أن f متباين ونعتبر عنصرا y من تقاطع الجماعة $f(A_i)$؛ من أجل كل i يوجد عندئذٍ عنصر من A_i ، x_i مثلاً، بحيث $y = f(x_i)$ ؛ وبما أن f متباين فإنه يوجد x وحيد بحيث $y = f(x)$ ، وبالتالي يكون لدينا حتماً $x = x_i$ مهما كان i ؛ وهكذا $x \in A_i$ من أجل كل i ، أي أن $y \in f(\cap A_i)$ ، وبالتالي

$$\cap f(A_i) \subset f(\cap A_i)\ .$$

وبهذا نكون قد أثبتنا الجزء الثاني من النظرية إذ أن الاحتواء العكسي محقق في كل الأحوال.

ملاحظة 4 - إن لم يكن f متبايناً، فمن الممكن ألاّ يتحقق الجزء الثاني من النظرية السابقة. لنأخذ على سبيل المثال مجموعة Y تحتوي على الأقل عنصرين a وَ b ونأخذ $X = Y \times Y$ وَ $f = pr_2$ ؛ لتكن A مجموعة الأزواج (a, y) ، حيث $y \in Y$ ، وَ B مجموعة الأزواج (b, y) ، حيث $y \in Y$ ؛ من الواضح أنّ $A \cap B = \Phi$ ، وبالتالي $f(A \cap B) = \Phi$ ؛ لكن لدينا $Y = f(A) = f(B)$ بحيث تكون $f(A) \cap f(B)$ غير خالية.

نظرية 7 - ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً، ولتكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعة غير خالية من أجزاء Y . يكون لدينا عندئذٍ

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)\ .$$

بالفعل، إذا كان $x \in X$ ، فإن x ينتمي إلى الطرف الأيسر إذا وإذا فقط كان $f(x)$ عنصراً من تقاطع الجماعة A_i ، أي أن $f(x) \in A_i$ مهما كان i ، وبعبارة أخرى أن $x \in f^{-1}(A_i)$ من أجل كل i ، أو أن x ينتمي إلى الطرف الأيمن، ومنه تكون النظرية صحيحة.

هذا ومن الممكن أن نبرهن بطريقة مماثلة على أن

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) .$$

نظرية 8 - لتكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعة غير خالية من أجزاء مجموعة X . لدينا العلاقتان:

$$X - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X - A_i) \text{ ، } X - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X = A_i) .$$

ليكن $x \in X$ ؛ إن العلاقة

$$x \in X - \bigcap_{i \in I} A_i$$

تكافئ نفي العلاقة

$x \in A_i$ من أجل كل $i \in I$ ،

وتكافئ بالتالي العلاقة

يوجد $i \in I$ بحيث $x \notin A_i$ ،

أي

يوجد $i \in I$ بحيث $x \in X - A_i$ ،

وبالتالي، تكافئ

$$x \in \bigcup_{i \in I} (X - A_i) \text{ ،}$$

وهذا يثبت الدستور الأيسر، أما الدستور الثاني فيمكن الحصول عليه، مما سبق، اعتماداً على العلاقة $X - (X - A) = A$ المحققة من أجل كل جزء A من X .

ف 4. علاقات التكافؤ

1. علاقات التكافؤ

لتكن R علاقة يدخل فيها متحولان x و y . نقول عنها أنها **علاقة تكافؤ** إذا حققت الشروط التالية :

أ) العلاقة $R\{x, x\}$ صحيحة من أجل كل x ؛

ب) العلاقة $R\{x, y\}$ تستلزم العلاقة $R\{y, x\}$ ؛

ج) العلاقتان $R\{x, y\}$ وَ $R\{y, z\}$ تستلزمان $R\{x, z\}$.

من الواضح مثلاً أن العلاقة $x = y$ علاقة تكافؤ .

هناك مفهوم قريب من المفهوم السابق وأكثر إفادة في المجال العملي ، ألا وهو مفهوم **علاقة التكافؤ على مجموعة** E ؛ ونعطي التسمية السابقة لكل علاقة $R\{x, y\}$ يدخل فيها متحولان x وَ y ، وتحقق الشروط التالية

(R_0) : العلاقة $R\{x, y\}$ تستلزم $x \in E$ وَ $y \in E$ ؛

(R_1) : العلاقة $R\{x, x\}$ محققة من أجل كل $x \in E$ ؛

(R_2) : العلاقة $R\{x, y\}$ تستلزم $R\{y, x\}$ ؛

(R_3) : العلاقتان $R\{x, y\}$ وَ $R\{y, z\}$ تستلزمان $R\{x, z\}$.

إذا كانت R علاقة تكافؤ على مجموعة E فإن بيان R هو بالتعريف المجموعة $G \subset E \times E$ المؤلفة من الأزواج (x, y) بحيث تكون $R\{x, y\}$ محققة ؛

وعندئذٍ تكون العلاقة $R\{x, y\}$ مكافئة لِـ $(x, y) \in G$، ويعني الشرط $(R\ 1)$ أن G تحتوي قطر $E \times E$.

لنأخذ الآن مثالاً ؛ نعتبر تطبيقاً f لِـ E في مجموعة كيفية M ؛ ولتكن العلاقة $R\{x, y\}$

$$f(x) = f(y) ;$$

ومن الواضح أننا نحصل على علاقة تكافؤ على E، تسمى **علاقة التكافؤ المرافقة للتطبيق** f؛ وسنرى في ما بعد، أن كل علاقات التكافؤ على E يحصل عليها بطريقة مماثلة.

نأخذ بعض الأمثلة الأخرى.

مثال 1 - مهما كانت المجموعة E، فإن قطر $E \times E$ هو بيان علاقة تكافؤ على E، ألا وهي العلاقة

$$x = y .$$

مثال 2 - من أجل كل مجموعة E، فإن المجموعة $E \times E$ هي بيان علاقة تكافؤ على E، ألا وهي العلاقة $(x, y) \in E \times E$؛ وفي هذه الحالة تكون العلاقة $R\{x, y\}$ محققة من أجل كل $x \in E$ وكل $y \in E$.

مثال 3 - نقول عن مجموعة X أنها **متساوية القدرة** (Equipotent) مع مجموعة Y، إذا وجد تقابل لِـ X في Y. إن العلاقة «X متساوية القدرة مع Y» هي علاقة تكافؤ : بالفعل X متساوية القدرة مع X (نعتبر التطبيق المطابق j_X، وهو تقابل) ؛ إذا كانت X متساوية القدرة مع Y فإن Y متساوية القدرة مع X (إذا وجد تقابل f لِـ X في Y، فإن f^{-1} يكون تقابلاً لِـ Y في X) ؛ وأخيراً إذا كانت X متساوية القدرة مع Y، وَ Y متساوية القدرة مع Z فإن X متساوية القدرة مع Z (إذا كان f تقابلاً لِـ X في Y، وَ g تقابلاً لِـ Y في Z فإن $g \circ f$ يكون تقابلاً لِـ X في Z حسب ف 2 نظرية 7). أنظر إلى الفصل القادم.

مثال 4 - لتكن **Z** مجموعة **الأعداد الصحيحة**، ...2، 1، 0، 1 -، 2 - ...
نقوم باختيار عدد صحيح $1 \leq p$ ونعتبر العلاقة

$$p \text{ يقسم } x - y ،$$

بين عنصرين x وَ y من **Z**؛ وهي علاقة تكافؤ على **Z**. بالفعل، إن العلاقة «p يقسم $x - x$» محققة دائماً كما هو واضح؛ ومن البديهي أن العلاقة «p يقسم $x - y$» تستلزم «p يقسم $y - x$»؛ وأخيراً إذا كان p يقسم $x - y$ وَ $y - z$ فإن p يقسم $x - z = (x - y) + (y - z)$).

إن علاقة التكافؤ هذه، المعرّفة على **Z**، تسمى **تكافؤ بترديد** p ويرمز لها

$$x \equiv y(p) ،$$

وتقرأ «x تكافئ y بترديد p»؛ وتعني أن الفرق بين x وَ y يساوي أحد مضاعفات p. ان نظرية الترديدات تلعب دوراً هاماً في الحساب منذ قرنين.

مثال 5 - في مجموعة الأعداد الحقيقية **R**، نحصل على علاقة تكافؤ عندما نكتب

$$\text{يوجد عدد صحيح } n \text{ بحيث } x - y = 2\pi n ؛$$

وتسمى **تكافؤ بترديد** 2π. وهذه العلاقة أساسية عند تعريف الزوايا رياضيًا.

مثال 6 - لتكن E مجموعة الأزواج (p, q) حيث $p \in \mathbf{Z}$، $0 \neq q \in \mathbf{Z}$، ومن أجل $x = (p, q)$ وَ $y = (p', q')$، نرمز بِـ $R\{x, y\}$ للعلاقة

$$p\,q' = p'\,q ؛$$

ونحصل بذلك على علاقة تكافؤ على E (هذا غير بديهي لكن يمكن إثباته بواسطة بعض الحسابات الابتدائية). وعلاقة التكافؤ هذه أساسية عند إعطاء تعريف رياضي للأعداد الناطقة انطلاقاً من الأعداد الصحيحة (ف 29). ننصح القارئ أن يثبت أن R علاقة تكافؤ.

مثال 7 - لتكن E مجموعة نقط الفضاء العادي، ونختار مستقيماً D، ونعتبر العلاقة

يوجد مستقيم مارّ بِـ x وَ y ومتوازي مع D؛ نحصل عندئذٍ على علاقة تكافؤ على E.

مثال 8 - لتكن E مجموعة المثلثات في المستوي، ولتكن $R\{x, y\}$ العلاقة

المثلثان x وَ y متساويان،

حيث يكون التساوي «معرّفاً» كما هو الحال في الهندسة الابتدائية، أي أنه يوجد تحويل يحوّل x إلى y (ونفترض هنا أننا نعرف معنى التحويل...). ونحصل عندئذٍ على علاقة تكافؤ على E.

لتكن R علاقة تكافؤ معرّفة على مجموعة E؛ في ما يلي نعوّض في أغلب الأحيان الكتابة $R\{x, y\}$ بِـ

$$x \equiv y(R)$$

وهي كتابة مستوحاة من المثال 4. وهكذا فإنه يكون لدينا الشروط التالية:

إن العلاقة $x \equiv x(R)$ محققة من أجل كل $x \in E$؛
إن العلاقة $x \equiv y(R)$ تستلزم (وبالتالي تكافؤ) العلاقة

$$y \equiv x(R)$$

إن العلاقتين $x \equiv y(R)$ وَ $y \equiv z(R)$ تستلزمان العلاقة

$$x \equiv z(R).$$

2. حاصل قسمة مجموعة بعلاقة تكافؤ

إن النتيجة التي سنثبتها، تبين كيف يمكن الحصول على كل علاقات التكافؤ في مجموعة ما.

نظرية 1 - لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة E . توجد مجموعة M وتطبيق $f: E \to M$ بحيث تكون العلاقتان

$$x \equiv y\ (R)$$
$$f(x) = f(y) \qquad \text{و}$$

متكافئتين .

وسوف لن نكتفي بإثبات وجود f و M بل سوف ننشئ مجموعة M وتطبيقا f يحققان الشرط المطلوب .

من أجل كل $x \in E$ ، إن صف x وفق R هو بالتعريف المجموعة F_x المؤلفة من العناصر $y \in E$ التي تحقق العلاقة

$$x \equiv y\ (R) ؛$$

أي إن العلاقتين

$$y \in F_x \quad \text{و} \quad x \equiv y\ (R)$$

متكافئتان . وسنثبت أن العلاقتين

$$x \equiv y\ (R)$$
$$F_x = F_y \qquad \text{و}$$

متكافئتان .

لنفترض أن $x \equiv y\ (R)$ ؛ إن العلاقة $z \in F_y$ ، التي تعني أن $y \equiv z\ (R)$ ، تستلزم عندئذٍ $x \equiv z\ (R)$ ، أي $z \in F_x$ ، وبالتالي فإن العلاقة $x \equiv y\ (R)$ تستلزم $F_y \subset F_x$ ، ولنفس السبب تستلزم أيضاً $F_x \subset F_y$ ، ومنه $F_x = F_y$. لنفترض عكسياً أن $F_x = F_y$ ؛ بما أن $y \equiv y\ (R)$ ، أي $y \in F_y$ ، فيكون لدينا أيضاً $y \in F_x$ ، أي $x \equiv y\ (R)$.

يمكننا الآن البرهان على النظرية 1 . نعتبر في $\mathcal{P}(E)$ ، مجموعة أجزاء E ، نعتبر المجموعة المؤلفة من الأجزاء F التي تحقق

$$F = F_x$$

من أجل عنصر $x \in E$ على الأقل - وهي مجموعة صفوف تكافؤ عناصر E ؛ ويرمز لهذه المجموعة بـ E/R وتسمى **حاصل قسمة E على علاقة التكافؤ R** ؛ لنعرّف الآن تطبيقا

$$f : E \to E/R$$

وذلك بوضع

$$f(x) = F_x$$

أي أننا نرافق كل عنصر $x \in E$ بصف تكافؤه وفق R ؛ وقد سبق أن رأينا أن

$$x \equiv y \ (R)$$

تكافئ $F_x = F_y$ ؛ ومن الواضح أن العلاقة الأخيرة تكتب أيضاً على الصورة

$$f(x) = f(y)$$

وبهذا ينتهي البرهان.

إن التطبيق السابق f يسمى التطبيق القانوني من E في E/R ؛ وهو غامر حسب إنشاء E/R.

ونلاحظ أن الصفوف F_x تتمتع بخاصتين هامتين: إن اتحاد الجماعة F_x يساوي E كلها (وهذا لأن $x \in F_x$ مهما كان $x \in E$) ؛ ومن جهة أخرى إذا كان لدينا صفّين F_x و F_y ، فإنهما يكونان متساويين أو منفصلين ، إذ أنه إذا وجد عنصر z في $F_x \cap F_y$ ، فإنه يكون لدينا

$$x \equiv z \ (R) \text{ و } y \equiv z \ (R)$$

ومنهما ، باستعمال (R_2) و (R_3) ، نحصل على $x \equiv y \ (R)$ ، أي $F_x = F_y$ كما رأينا في برهان النظرية 1 .

ملاحظة 1 - إن برهان النظرية 1 يعتمد على إنشاء تطبيق من E في $\mathcal{P}(E)$ ، مجموعة أجزاء E ، ألا وهو التطبيق $x \mapsto F_x$. ومن الواضح أن هذا غير ممكن إذا كنا لا نعرف سوى التوابع الكلاسيكية (متحولات وقيم

حقيقية)، ونرى من هنا ضرورة اعتبار التوابع المعرّفة على مجموعات كيفية والتي تأخذ قيمها في مجموعات كيفية.

ونشير من جهة أخرى إلى أن طريقة إنشاء المجموعة E/R، وهي قد تبدو غريبة للمبتدئين، تستعمل في الحياة اليومية: إذا كانت E هي مجموعة كل الرجال، والعلاقة R هي «x و y ينتميان لنفس الوطن»، وهي علاقة تكافؤ على E؛ عندئذٍ من أجل كل $x \in E$ فإن F_x هي مجموعة كل الرجال الذين وطنهم هو وطن x؛ وبالتالي تكون E/R هي مجموعة الأوطان الموجودة...

لنأخذ الآن بعض الأمثلة عن إنشاء مجموعات حاصل قسمة.

مثال 9 - نعتبر في المجموعة $\mathbf{Z}$ علاقة التكافؤ المعرّفة في المثال 4 (تكافؤ بترديد p)؛ من أجل كل $x \in \mathbf{Z}$ فإن صفه F_x يتألف من الأعداد الصحيحة $x + np$؛ هو عدد صحيح كيفي؛ وعدد هذه الصفوف يساوي p بالتحديد (نفترض $p \geq 1$). بالفعل، يمكن كتابة كل $x \in \mathbf{Z}$ على الشكل

$$(0 \leq r < p) \quad x = np + r$$

(حسب «قسمة x على p»)، وإن معرفة الباقي r تعين الصف F_x بكل وضوح - وبعبارة أخرى، كل صف وفق p هو أحد الصفوف

$$F_0 ، F_1 ، \ldots ، F_{p-1} ؛$$

وكل صفان من هذه الصفوف منفصلان، إذ أنه إذا كان r و r' يحققان

$$0 \leq r \leq p - 1$$
$$0 \leq r' \leq p - 1$$
$$r \equiv r' \ (p)$$

فإن $r = r'$.

وهكذا فإننا نرى أن المجموعة E/R، التي نرمز لها

$$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} ،$$

تتألف من p عنصر بالتحديد، وتسمى هذه العناصر الأعداد الصحيحة بترديد p. إن العدد الصحيح بترديد p (أو وفق p) هو عبارة عن مجموعة أعداد صحيحة عادية، وإذا كان x أحدها فإن الأعداد الأخرى يحصل عليها بإضافة إحدى مضاعفات p إلى x؛ ونقول عن x أنه ممثل للعدد الصحيح بترديد p المعتبر. هذا وان كل عدد صحيح بترديد p يقبل ممثلاً وحيداً محصوراً بين 0 و $(p-1)$، ويمكن بذلك ترقيم عناصر $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ بواسطة الأعداد 0، 1، ... $(p-1)$. وإذا كان على سبيل المثال $p = 6$ فإن عناصر $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ تمثّل بـ 0، 1، 2، 4، 5؛ وإذا تحدثنا مثلاً عن صف 4 بترديد 6، أي عن العدد 4 من $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$، فإن هذا يعني «مجموعة الأعداد الصحيحة $6n + 4$». وهكذا فإن التطبيق القانوني لـ $\mathbf{Z}$ على $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ يرافق كل عدد صحيح بباقي قسمته على p.

مثال 10 - في المثال 5 من الفقرة 1، تكون مجموعة الصفوف هي $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$، وعناصرها تدعى الأعداد الحقيقية بترديد 2π. ويكون مثلاً قياس زاوية ما هو عدد حقيقي بترديد 2π.

مثال 11 - في المثال 7 من الفقرة 1، تكون الصفوف هي المستقيمات المتوازية مع D، ومجموعة هذه المستقيمات هي مجموعة حاصل القسمة.

3. التوابع المعرّفة على مجموعة حاصل قسمة(*)

إن النتيجة التالية مفيدة كثيراً:

نظرية 2 - لتكن E مجموعة، و R علاقة تكافؤ على E، و p التطبيق القانوني لـ E في E/R، و f تطبيقاً من E في مجموعة X.
إن الخاصتين التاليتين متكافئتان:

أ) العلاقة $x \equiv y\ (R)$ تستلزم $f(x) = f(y)$

(*) لن تكون نتائج هذه الفقرة ضرورية قبل ف 29.

ب) يوجد تطبيق $\bar{f}: E/R \to X$ بحيث $f = \bar{f} \circ p$.

وإذا تحقق الشرطان فإن التطبيق $\bar{f}$ وحيد ؛ ويكون $\bar{f}$ متبايناً إذا وإذا فقط كانت العلاقتان $x \equiv y\ (R)$ و $f(x) = f(y)$ متكافئتين ؛ ويكون غامراً إذا وإذا فقط كان f غامراً.

حسب النظرية 1 من ف 2 فإن الشرط اللازم والكافي لوجود $\bar{f}$ بحيث تتحقق ب) هو أنَّ العلاقة $p(x) = p(y)$ تستلزم $f(x) = f(y)$ ؛ ولكن العلاقة $p(x) = p(y)$ تكافئ $x \equiv y\ (R)$ ؛ ويوجد بالتالي تكافؤ بين أ) و ب).

أمّا وحدانية $\bar{f}$ فهي ناتجة عن كون p غامر ؛ لنفترض وجود تطبيقين g و h بحيث $f = g o p = h o p$ ؛ يكون لدينا عندئذٍ $g(p(x)) = h(p(x))$ من أجل كل $x \in E$ ؛ وبالتالي فإن $g = h$ على $p(E)$، أي على E/R، ومنه $g = h$.

بما أن $f(E) = \bar{f}(p(E)) = \bar{f}(E/R)$، فإن $\bar{f}$ يكون غامراً إذا وإذا فقط كان f غامراً. لأجل أن يكون $\bar{f}$ متبايناً فإنه يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة

$$p(x) = p(y) \quad \text{تستلزم} \quad \bar{f}(p(x)) = \bar{f}(p(y))$$

(إذ أن كل عنصر من E/R هو من الشكل $p(z)$، وبعبارة أخرى، فإن $f(x) = f(y)$ تستلزم $x \equiv y\ (R)$، وبهذا ينتهي البرهان.

إن النظرية التالية، وهي أكثر تعقيداً من السابقة، تلعب دوراً هاماً في تعريف عمليات جبرية على عناصر مجموعة حاصل قسمة.

نظرية 3 - لتكن X و Y و Z ثلاثة مجموعات، و R و S و T علاقات تكافؤ معرّفة عليها، و f تطبيقاً من $X \times Y$ في Z. لتكن $x \to \bar{x}$ و $y \to \bar{y}$ و $z \to \bar{z}$ التطبيقات القانونية من X و Y و Z على X/R و Y/S و Z/T. إن القضيتين التاليتين متكافئتان :

أ) إن العلاقتين

$$x' \equiv x''(R) \quad \text{و} \quad y' \equiv y''(S)$$

تستلزمان $f(x', y') \equiv f(x'', y'')\,(T)$

ب) يوجد تطبيق $\bar{f} :(X/R) \times (Y/S) \to Z/T$ بحيث يكون لدينا $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{f(x, y)}$ من أجل كل $x \in X$ و $y \in Y$.

وإذا تحقق الشرطان فإن $\bar{f}$ وحيد.

لنعتبر التطبيق $u : X \times Y \to Z/T$ المعرّف بـ $u(x, y) = \overline{f(x, y)}$؛ وليكن التطبيق $v : X \times Y \to (X/R) \times (Y/S)$ المعرّف بـ $v(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$؛ وهكذا فإن المسألة تعود إلى إنشاء تطبيق $\bar{f} : (X/R) \times (Y/S) \to Z/T$ بحيث يكون لدينا $u = \bar{f} \circ v$؛ ونطبق لهذا الغرض النظرية 1 من ف 2: يوجد $\bar{f}$ إذا وإذا فقط كانت العلاقة $v(x', y') = v(x'', y'')$ تستلزم $u(x', y') = u(x'', y'')$؛ وبما أن العلاقة الأولى تكتب على الشكل $\bar{x}' = \bar{x}''$ و $\bar{y}' = \bar{y}''$، أي $x' \equiv x''(R)$ و $y' \equiv y''(S)$، وأن العلاقة الثانية تكتب على الشكل $f(x', y') \equiv f(x'', y'')\,(T)$؛ فإن النظرية 1 ف 2 تنص على تكافؤ أ) و ب). إذا وجد $\bar{f}$ بحيث تتحقق ب) فإن $\bar{f}$ وحيد لأن v غامر. وبهذا ينتهي البرهان.

مثال 12 - نأخذ $X = Y = Z = \mathbf{Z}$، مجموعة الأعداد الصحيحة، و R و S و T علاقة التكافؤ بترديد p، حيث p عدد صحيح معطى غير معدوم. لنعتبر التطبيقين $f, g : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ المعرّفين بـ

$$f(x, y) = x + y \quad \text{و} \quad g(x, y) = x \cdot y \;؛$$

إن الشرط أ) من النظرية 3 يتحقق من أجل f و g ولرؤية ذلك فإنه ينبغي أن نتأكد من أن العلاقتين $x' \equiv x''\,(p)$ و $y' \equiv y''\,(p)$ تستلزمان

$$x' + y' \equiv x'' + y''(p) \quad \text{و} \quad x' \cdot y' \equiv x'' \cdot y''(p) \;،$$

وهذا واضح نظراً للمتطابقتين

$$(x' + y') - (x'' + y'') = (x' - x'') + (y' - y'')$$

$$x' y' - x'' y'' = (x' - x'')y' + x''(y' - y') \;.$$

وبإمكاننا عندئذٍ تطبيق النظرية 3 على f وعلى g، أي أنه يوجد تطبيقان

$$\bar{f}, \bar{g} : (\mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/p.\mathbf{Z}$$

يتميزان بالخواص التالية : إذا كان لدينا عنصرين ξ و μ في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ، ممثلين بعددين صحيحين x و y (حيث $\xi = \bar{x}$ و $\eta = \bar{y}$ حسب اصطلاحات النظرية 3) ، فإن $\bar{f}(\xi, \eta)$ يكون صف $x + y$ و $\bar{g}(\xi, \eta)$ يكون صف xy ، مع العلم أن $\bar{f}(\xi, \eta)$ و $\bar{g}(\xi, \eta)$ لا يتعلقان سوى بصف x وصف y وليس باختيار x و y في الصفين المذكورين.

ونكتب في المجال العملي

$$\bar{g}(\xi, \eta) = \xi\eta \text{ و } \bar{f}(\xi, \eta) = \xi + \eta$$

ونقول عن $\xi + \eta$ و $\xi\eta$ أنهما مجموع ξ و η ، وجداءهما في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. وإذا كان $\theta : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ هو التطبيق القانوني ، فإننا نرى أن $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ و $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ مهما كان x و y في $\mathbf{Z}$.

وعملياً يكون حساب الجمع والضرب في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ على النحو التالي : لتكن 0 ، 1 ، ... ،$(p - 1)$ الأعداد الصحيحة التي تمثل الصفوف (أنظر مثال 9) ، وإذا كان لدينا صفَّين وفق p ممثلين بـ x و y (حيث x و y عددين صحيحين محصورين بين 0 و $(p - 1)$) ، فإن مجموع هذين الصفين يكون ممثلاً بباقي قسمة $x + y$ على p ، وجداءهما يكون ممثلاً بباقي قسمة xy على p .

إذا كان مثلاً $p = 5$ فإن «جدول الجمع» و «جدول الضرب» يكونان كما يلي :

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ويعني الدستور $2 \cdot 3 = 1$ ، مثلاً ، أن

$$2 \cdot 3 \equiv 1 \qquad (5)$$

وإذا كان $p = 2$ ، فيكون هناك صفين، يمكن أن نسميهما «زوجي» و «فردي» ، وتكون قواعد الحساب كما يلي :

زوجي + زوجي = زوجي	زوجي × زوجي = زوجي
زوجي + فردي = فردي	فردي × فردي = فردي
فردي + فردي = زوجي	فردي × زوجي = زوجي
فردي + زوجي = فردي	زوجي × فردي = زوجي

ف 5. المجموعات المنتهية والأعداد الصحيحة

لا يمكن القيام بأي عمل في الرياضيات دون استخدام نظرية الأعداد الصحيحة، وقبل إنشاء نظرية المجموعات التي تعتبر نقطة انطلاق الرياضيات، قال كرونكير «Kronecker» : «إن الله اعطانا الأعداد الصحيحة، وكل الباقي من عمل الإنسان».

وفي الواقع، بإمكاننا اليوم بواسطة نظرية المجموعات إنشاء الأعداد الصحيحة، والفكرة الأساسية هي أن الأعداد الصحيحة تسمح «حساب» أو «عد» عناصر المجموعات «المنتهية»، وأن مجموعتين تقبلان نفس «عدد العناصر» إذا وجد تقابل بينهما، وفي هذه الحالة فقط.

وهكذا فإن مفهوم العدد الصحيح يأتي من مفهوم المجموعة المنتهية حيث لا نفرق بين مجموعتين متساوتي القدرة (ف 4، مثال 3).

وعندما شرع في إنشاء نظرية المجموعات، اهتم العالم كونتور «Canton» بهذه المسألة تحت زاوية أكثر عمقا وتعميما، تكمن في «عدّ» عناصر المجموعات الكيفية، منتهية كانت أو غير منتهية، وهذا ما أدّى به إلى «الأعداد اللامنتهية» أو «السامية»، وهي تسمح بالتمييز بين مختلف أصناف المجموعات غير المنتهية. وعلى الرغم من أن هذه «الأعداد» لا تستعمل كثيراً في التطبيقات، إلا أنه يصعب إنشاء نظرية الأعداد الصحيحة العادية دون التعرّض إليها.

هذا واننا نعطي أغلب نتائج هذا الفصل بدون برهان، وذلك لاختصار النص (إذ أن البراهين تكون طويلة ومعقدة أكثر الأحيان). ولن يكون هذا الفصل سوى إطار لمن يريد إعطاء دراسة كاملة ودقيقة للأعداد الصحيحة.

ونشير أخيراً إلى أن الأعداد التي ندرسها هنا هي كائنات رياضية حسب مفهوم ف 0 (نستخدم في تعريفها الإشارتين τ و □، ف 0 رقم 9)، وهي نموذجات مجرّدة للأعداد «الملموسة»، وينبغي عدم الخلط بين المفهومين.

1. المجموعات المتساوية القدرة

نذكر أن مجموعة X تكون متساوية القدرة مع مجموعة Y إذا وجد تقابل لـ X في Y (ف 4، مثال 3). إن العلاقة

X متساوية القدرة مع Y،

التي نرمز لها في بعض الأحيان

$$E_q(X, Y)،$$

ي علاقة تكافؤ.

وتحقق هذه العلاقة بعض الخواص بالنسبة للعمليات المعرفة على جموعات.

لتكن X و Y و X' و Y' أربعة مجموعات، ونفترض أن X متساوية القدرة مع Y وأن X' متساوية القدرة مع Y'. عندئذٍ تكون $X \times X'$ متساوية القدرة مع $Y \times Y'$ (إذا كان f تقابلاً لِـ X في Y و f' تقابلاً لـ X' في Y' فإن (f, f') تقابل لـ $X \times X'$ في $Y \times Y'$)؛ كما أن

$$X^{X'}$$

مجموعة تطبيقات X' في X (ف 2 ملاحظة 3) متساوية القدرة مع $Y^{Y'}$ مجموعة تطبيقات Y' في Y؛ وأخيراً أن $X \cup X'$ متساوية القدرة مع $Y \cup Y'$ بمجرد أن يكون X منفصلاً عن X' و Y عن Y': إذا كان f تقابلاً لِـ X في Y و f' تقابلاً لِـ X' في Y'، فإنه يمكن تعريف تقابل g لِـ $X \cup X'$ في $Y \cup Y'$ بوضع

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{إذا كان } x \in X \\ f'(x) & \text{إذا كان } x \in X'. \end{array} \right.$$

وبالإضافة إلى هذه الخواص البسيطة في نصوصها وبراهينها، توجد خواص أخرى ذات نص بسيط لكن برهانها أكثر تعقيداً؛ ومن أهمها النتيجة التالية التي تعني حدسياً أنه يمكن دائماً «مقارنة» «عدد عناصر» مجموعة X ما مع «عدد عناصر» أية مجموعة أخرى Y :

نظرية 1 – لتكن X و Y مجموعتين. يتحقق على الأقل أحد النصين التاليين

X متساوية القدرة مع جزء من Y
Y متساوية القدرة مع جزء من X

وإذا تحققا في آن واحد فإن X و Y متساويتا القدرة.

لقد تكهن كنتور بهذه النتيجة في بداية أبحاثه؛ وقد كان برنشتاين Bernstein أول من برهن الجزء الثاني من النص عام 1897؛ أما الجزء الأول، وهو أكثر صعوبة، فقد برهن عليه زارمالو Zermelo سنة 1904. وفي التمرين 5 من هذا الفصل يوجد برهان برنشتاين. هذا وإن برهان النظرية 1 (وهي تبدو بديهية) غير بسيط حتى بالنسبة للمجموعات المنتهية، وننصح القارئ أن يفكر في ذلك حتى يقتنع (والأمر هنا هو برهان نتيجة وليس فقط جعلها مقبولة).

2. كاردينال مجموعة

يمكن توسيع مفهوم «عدد عناصر» مجموعة منتهية حتى يشمل الحالة العامة؛ ولأجل ذلك، كما فعل جورج كنتور، نقوم بمرافقة كل مجموعة X بكائن رياضي جديد

$\text{Card } X$ ،

يسمى كاردينال أو قدرة X ويعرّف على النحو التالي: إن الشرط اللازم والكافي لتكون مجموعتان X و Y متساويتي القدرة هو أن $\text{Card } X = \text{Card } Y$.

م.م. **ملاحظة 1** – لو وجدت مجموعة Ω– عناصرها هي كل المجموعات

لأمكن تعريف $\text{Card}\ X$ بصف X وفق علاقة التكافؤ $E_q(X, Y)$. لكننا نعلم (ف 1، ملاحظة 5) ان هذه المجموعة Ω غير موجودة، وبالتالي لا يمكن اتباع طريقة ف 4. وفي الواقع يكون تعريف $\text{Card}\ X$ معطى بالدستور

$$\text{Card}\ X = \tau_Y\big(E_q(X, Y)\big)$$

حيث نستخدم اعتبارات ف 0، رقم 9.

نقول عن كائن رياضي x أنه **عدد كاردينال** إذا وجدت مجموعة X بحيث $x = \text{Card}\ X$.

ومن بين أعداد الكاردينال نذكر الأعداد 0، 1، 2، ... التي نعرّفها رياضياً بواسطة طرق ف 0، (وهي بطبيعة الحال غير الأعداد 0، 1، 2 ... «العادية» التي تعبر عن افكار ميتافيزيائية ناتجة عن تجارب ملموسة):

(1) $0 = \text{Card}\ \Phi$،

(2) $1 = \text{Card}\ \{\Phi\}$

أي كاردينال المجموعة $\{\Phi\}$ المؤلفة من العنصر Φ وحده،

(3) $2 = \text{Card}\big\{\Phi, \{\Phi\}\big\}$

أي كاردينال المجموعة المؤلفة من عنصرين هما: المجموعة الخالية Φ والمجموعة $\{\Phi\}$ المؤلفة من العنصر Φ وحده الخ... إذا كانت X مجموعة فإن قولنا $\text{Card}\ X = 0$ يعني أن X خالية، وقولنا أن $\text{Card}\ X = 1$ يعني أن X مؤلفة من عنصر وحيد (أي أن X غير خالية وأن العلاقتين $x \in X$ و $y \in X$ تؤديان $x = y$)؛ وقولنا أن $\text{Card}\ X = 2$ يعني أن X مؤلفة من عنصرين (أي أنه يوجد $x \in X$ و $y \in X$ بحيث $x \neq y$ وبحيث تعني العلاقة $z \in X$ أن $z = x$ أو $z = y$)، الخ...

وسنعود إلى هذه الكاردينالات الخاصة في الفقرة 4 من هذا الفصل.

ليكن x و y عددي كاردينال، نكتب

$$x \leq y$$

إذا وجدت مجموعتان X و Y بحيث $\text{Card } X = x$ و $\text{Card } Y = y$ وبحيث تكون X متساوية القدرة مع جزء من Y – وإذا تحقق ذلك من أجل اختيار مناسب لـX و Y فإنه يتحقق أيضاً بالنسبة لكل اختيار آخر.

وتعبر النظرية 1 على أنه من أجل كل x و y، لدينا دائماً

(4) $x \leq y$ أو $y \leq x$ ؛

ولدينا بالإضافة إلى ذلك

(5) $x \leq y$ و $y \leq x$ تؤديان إلى $x = y$.

ومن جهة أخرى، إذا كانت x و y و z ثلاثة كاردينالات فمن الواضح أنّ

(6) $x \leq y$ و $y \leq z$ تؤديان إلى $x \leq z$ ؛

إذ أنه لو وجد تباين f لـX في Y وتباين g لـY في Z فإن $g o f$ تباين لـX في Z ، حيث X و Z مجموعات بحيث $x = \text{Card } X$ و $y = \text{Card } Y$ و $z = \text{Card } Z$. نقبل النتيجة التالية، وهي أهم خواص العلاقة $x \leq y$ المعرّفة على الكاردينالات :

نظرية 2 – لتكن E مجموعة كاردينالات. يوجد كاردينال وحيد a يتمتع بالخاصتين التاليتين :

(i) لدينا $x \leq a$ من أجل كل $x \in E$

(ii) إذا وجد كاردينال b بحيث $x \leq b$ من أجل كل $x \leq E$ فإن $a \leq b$.
[ولدينا نص مماثل عندما نعوّض «≤» بالعلاقة «≥»] .

وتعبر هذه النظرية على أنه إذا كانت E مجموعة كاردينالات، فإنه توجد كاردينالات أكبر من كل عناصر E ، ومن بين هذه الكاردينالات يوجد كاردينال أصغر من الأخرى، [كما توجد كاردينالات أصغر من كل عناصر E ، ومن بين هذه الكاردينالات يوجد كاردينال أكبر من الأخرى] ، وهو

أصغر كاردينال a بحيث $x \leq a$ مهما كان $x \in E$ ، ونسميه الحد الأعلى للمجموعة E ونرمز له بـ $\text{Sup}(E)$

[ويوجد أيضاً أكبر كاردينال a بحيث $a \leq x$ مهما كان $x \in E$ ويسمى الحد الأسفل للمجموعة E ونرمز له بـ $\inf(E)$] .

ملاحظة 2 - لقد قلنا في النص السابق أن E هي مجموعة كردينالات ، وهذا أمر أساسي لأنه لا توجد مجموعة تحتوي كل الكاردينالات . ولو وجدت هذه المجموعة وطبقنا عليها النظرية 2 فإننا نحصل على كاردينال a أكبر من كل الكاردينالات - ولكن ، هذا مستحيل إذ أنه يمكن أن نبرهن أن $x \underset{\neq}{<} 2^x$ مهما كان الكاردينال x .

وهكذا نرى أنه إذا أعطينا لكلمة «مجموعة» مفهومها الحدسي فإننا نعترض تناقضات منطقية .

ونشير من جهة أخرى إلى أنه إذا كانت E مجموعة كاردينالات فإن الكاردينالين $\text{Sup}(E)$ و $\inf(E)$ لا ينتميان بالضرورة إلى E . فإذا أخذنا $E = \mathbf{N}$ مجموعة الكردينالات المنتهية (أنظر الفقرة 4) ، فإن $\text{Sup}(E)$ هي القدرة القابلة للعد (فقرة 5) ولا تنتمي بالتالي إلى E .

ولكن ، إذا كانت E مجموعة كاردينالات منتهية ، أي مجموعة أعداد طبيعية (نعرّف هذا المفهوم في الفقرة 4) ، فإنه يكون لدينا دائماً $\inf(E) \in E$. فعلاً ، بما أن $\inf(E)$ أصغر من كل $x \in E$ فمن الواضح أن $\inf(E)$ منته ؛ إذا كان $\inf(E)$ لا ينتمي إلى E فيكون لدينا $\inf(E) < x$ ، وبالتالي

$$\inf(E) + 1 \leq x$$

مهما كان $x \in E$ ، وعندئذٍ ، حسب الخاصة (ii) من النظرية 2 ، نحصل على العلاقة

$$\inf(E) + 1 \leq \inf(E)$$

وهذا مستحيل لأن $\inf(E)$ منته .

وبعبارة أخرى، إذا كانت E مجموعة أعداد طبيعية فإنه يوجد فيها عنصر أصغر من كل العناصر الأخرى؛ وكثيراً ما نستعمل هذه النتيجة في المجال العملي.

3. العمليات على الكاردينالات

ليكن x و y عددي كاردينال ونضع $x = \text{Card } X$ و $y = \text{Card } Y$؛ إن جداء x مع y هو بالتعريف الكاردينال

$$xy = \text{Card}(X \times Y)\text{؛} \tag{7}$$

ومن الواضح أنه لا يتغير إذا عوضنا X بمجموعة متساوية القدرة معها و Y بمجموعة متساوية القدرة معها.

وتحقق هذه العملية المتطابقات التالية

$$xy = yx\text{؛ } (xy)z = x(yz)\text{؛ } 0x = 0\text{؛ } 1x = x\,. \tag{8}$$

لنثبت المتطابقة الثانية مثلاً، ويكفي أن نلاحظ أنه إذا كانت لدينا ثلاثة مجموعات X و Y و Z، فإن $X \times (Y \times Z)$ متساوية القدرة مع $(X \times Y) \times Z$، وهو ما نحصل عليه عندما نرافق كل عنصر $(a, (b, c))$ من المجموعة الأولى بالعنصر $((a, b), c)$ من المجموعة الثانية.

م **ملاحظة 3** - على الرغم مما يشير إليه الحدس فمن الخطأ أن

$$xz = yz \text{ تؤدي إلى } x = y$$

حتى إذا كان $z \neq 0$. وللحصول على مثال مضاد، نقبل وجود مجموعة $\mathbf{N}$ عناصرها هي $0, 1, 2 \ldots$ (سنرى ذلك في ما بعد)؛ لنأخذ $z = \text{Card } \mathbf{N}$، $x = 1$ و $y = 2$، أي أن x هو كاردينال مجموعة X مؤلفة من عنصر وحيد a، و y هو كاردينال مجموعة Y مؤلفة من عنصرين b و c. وتعود المسألة إلى إنشاء تقابل f من $X \times \mathbf{N}$ في $Y \times \mathbf{N}$؛ ونضع، من أجل ذلك

$$f(a,n) = \begin{cases} (b,p) & \text{إذا كان } n = 2p \text{ زوجياً} \\ (c,p) & \text{إذا كان } n = 2p+1 \text{ فردياً .} \end{cases}$$

من الواضح أن

$xz = yz$ تؤدي إلى $x = y$ ،

إذا كانت x و y و z ثلاثة أعداد «طبيعية» حيث $z \neq 0$.

ليكن الآن x و y عددي كاردينال ، لنختر مجموعتين منفصلتين X و Y بحيث $x = \text{Card } X$ و $y = \text{Card } Y$ ؛ إن مجموع x و y هو بالتعريف الكاردينال

(9) $x + y = \text{Card}(X \cup Y)$ حيث $X \cap Y = \Phi$ ؛

ويمكن التأكد مباشرة أنه لا يتعلق باختيار X و Y . لدينا المتطابقات

(10) $x + y = y + x$ ؛ $x + (y + z) = (x + y) + z$ ؛ $x + 0 = x$.

وتعبّر الأخيرة مثلاً أن المجموعة X متساوية القدرة مع $X \cup \Phi$ ، بل لدينا في الواقع $X = X \cup \Phi$.

ملاحظة 4 - إن تعريف $x + y$ المعطى آنفاً يفترض إمكانية اختيار مجموعتين X و Y بحيث $X \cap Y = \Phi$ و $\text{Card } X = x$ و $\text{Card } Y = y$. لنضع $x + \text{Card } X'$ و $y = \text{Card } Y'$ ، ونأخذ .ش

$$X = X' \times \{a\} \text{ و } Y = Y' \times \{b\}$$

حيث $a \neq b$ ؛ عندئذٍ تكون X متساوية القدرة مع X' ، و Y مع Y' ، كما أن $X \cap Y = \Phi$ لأن العلاقة $(x, a) = (y, b)$ تؤدي إلى $a = b$.

م **ملاحظة 5** - هنا أيضاً ، تكون العلاقة

$x + y = z + z$ تستلزم $x = z$ ،

غير محققة ؛ إذ أنه يمكن الحصول على

$$x + x = x \quad \text{مع} \quad x \neq 0 :$$

نأخذ $x = \text{Card}\, \mathbf{N}$ حيث $\mathbf{N}$ هي مجموعة الأعداد 0، 1، 2 ...؛ ونرى أن $x + x = \text{Card}\, Y$، حيث Y هي مجموعة الأزواج (n, u) مع $n \in \mathbf{N}$. و $u = 0$ أو $u = 1$؛ ونحصل بالطريقة التالية على تقابل f من Y في $\mathbf{N}$:

$$f(n, u) = \begin{cases} 2n & \text{إذا كان } u = 0 \\ 2n + 1 & \text{إذا كان } u = 1 \end{cases}$$

وهكذا فإن $x + x = x$ . . .

ومن جهة أخرى توجد علاقة بين الجمع والضرب، وهي علاقة «التوزيعية»:

(11) $x(y + z) = xy + xz$ ؛

وتعني أنه إذا كانت لدينا ثلاثة مجموعات X و Y و Z فإن $X \times (Y \cup Z)$ متساوية القدرة مع $(X \times Y) \cup (X \times Z)$، وهذا بديهي «هندسياً».

نعتبر أخيراً كاردينالين x و y، ونضع $x = \text{Card}\, X$ و $y = \text{Card}\, Y$؛ نضع

(12) $x^y = \text{Card}\,(X^Y)$

وهو كاردينال مجموعة كل تطبيقات Y في X. وتحقق هذه العملية المتطابقات التالية:

(13) $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$ ؛ $(xy)^z = x^z \cdot y^z$ ؛ $(x^y)^z = x^{yz}$ ؛ $x^0 = 1$ ؛ $x^1 = x$.

لنبرهن الأولى على سبيل المثال، ونضع $x = \text{Card}\, X$، $y = \text{Card}\, Y$ و $z = \text{Card}\, Z$، ونفترض أن Y و Z منفصلتان بحيث $y + z = \text{Card}\,(Y \cup Z)$. وتعود المسألة عندئذٍ إلى إثبات أن المجموعتين

$$X^{Y \cup Z} \quad \text{و} \quad X^Y \times X^Z$$

متساويتا القدرة، أي إلى انشاء تقابل من الأولى في الثانية ؛ ليكن إذن u

عنصراً من المجموعة الأولى، أي أن u هو تطبيق من $Y \cup Z$ في X؛ ليكن u_1 و u_2 مقصوريه على Y وعلى Z؛ نضع عندئذٍ $f(u) = (u_1, u_2)$، واعتماداً على افتراض Y و Z منفصلتين يمكن للقارئ أن يثبت بسهولة أن f تقابل.

ملاحظة 6 - نعتبر مجموعة A مؤلفة من عنصرين، مثلاً $A = \{0, 1\}$، وليكن f تطبيقاً لمجموعة X في المجموعة A؛ ولتعيين f فإنه يكفي طبعاً معرفة المجموعة $f^{-1}(0) \subset X$، وهي المجموعة المؤلفة من العناصر x التي تحقق $f(x) = 0$؛ ونرى عندئذٍ أن التطبيق $f \to f^{-1}(0)$ من A^X في $\mathcal{P}(X)$ هو تقابل؛ وبالتالي

$\text{Card}\, \mathcal{P}(X) = 2^{\text{Card}\, X}$.

ملاحظة 7 - بإمكاننا أن نبرهن على أنه من أجل كل كاردينال x يكون لدينا $x < 2^x$ (أي $x \leq 2^x$ و $x \neq 2^x$). وبصورة خاصة، إذا كانت X مجموعة ما فإن $\mathcal{P}(X)$ ليست متساوية القدرة مع X. أنظر تمرين 1.

م **ملاحظة 8** - يمكن أن نعرف بصورة عامة مجموع وجداء جماعة (منتهية أو غير منتهية) من أعداد الكاردينال. ونقوم بذلك على النحو التالي.

نعتبر في البداية جماعة من المجموعات $(X_i)_{i \in I}$؛ إن الجداء الديكارتي لهذه الجماعة هو بالتعريف المجموعة

$$\prod_{i \in I} X_i$$

التي تكون عناصرها هي الجماعات $(x_i)_{i \in I}$ حيث $x_i \in X_i$ من أجل كل $i \in I$؛ وهذا يعمم مفهوم ف 2، رقم 2، إذ أنه إذا كان $I = \{1, 2\}$ وإذا قمنا بمطابقة كل جماعة $(x_i)_{i \in I}$ مع الزوج (x_1, x_2) فإننا نرى أنه يمكن مطابقة $\prod_{i \in I} X_i$ مع $X_1 \times X_2$.

لتكن الآن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة كيفية من الكاردينالات، ومن أجل كل $i \in I$ نقوم باختيار مجموعة X_i بحيث $x_i = \text{Card}\, X_i$، ونضع بالتعريف

$$\prod_{i\in I} x_i = \text{Card}\left(\prod_{i\in I} X_i\right).$$

ونسمي هذا الـكاردينال جداء جماعة الـكاردينالات $(x_i)_{i\in I}$

وبطريقة مماثلة نعرّف مجموع الـكاردينالات $(x_i)_{i\in I}$، وهو الـكاردينال

$$\sum_{i\in I} x_i$$

المعرّف بالعلاقة

$$\sum_{i\in I} x_i = \text{Card}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right),$$

على شرط أن تكون المجموعات X_i منفصلة مثنى مثنى.

نفترض على سبيل المثال أن $x_i = 1$ مهما كان $i \in I$؛ عندئذٍ يمكن لنا أن نأخذ $X_i = \{i\}$ من أجل كل $i \in I$، وتكون I هي اتحاد هذه المجموعات؛ عندئذٍ يكون لدينا

(14) $\text{Card}\ I = \sum_{i\in I} x_i$ حيث $x_i = 1$ من أجل كل $i \in I$؛

ويعني ذلك، «حدسياً»، أن كل كاردينال هو مجموع (منته أو غير منته) حدود متساوية مع 1، وهذه الخاصة مألوفة بالنسبة للأعداد الطبيعية العادية.

4. المجموعات المنتهية والأعداد الطبيعية

إن النتيجة التالية أساسية:

نظرية 3 - لتكن X مجموعة. إن الخاصتين التاليتين متكافئتان:

أ) المجموعة الوحيدة المحتواة في X والمتساوية القدرة مع X هي X ذاتها.

ب) لدينا $\text{Card } X \neq 1 + \text{Card } X$.

لنفترض أن $\text{Card } X = 1 + \text{Card } X$ ، وليكن a كائناً لا ينتمي إلى X ، يوجد عندئذٍ تقابل f من $X \cup \{a\}$ في X ؛ إن صورة X وفق f محتواة تماماً في X ، وهي بطبيعة الحال متساوية القدرة مع X .

لنفترض عكسياً أن X متساوية القدرة مع مجموعة X' محتواة تماماً في X . بما أن $X = X' \cup (X - X')$ ، فإنه يكون لدينا

$$\text{Card } X = \text{Card } X' + \text{Card}(X - X') ؛$$

هذا وإن $1 \leq \text{Card}(X - X')$ لأن $X - X' \neq \Phi$ ؛ وبالتالي

$$\text{Card } X \geq \text{Card } X + 1 \geq \text{Card } X$$

ومنه، حسب النظرية 1، $\text{Card } X = 1 + \text{Card } X$ ، وبه ينتهي برهان النظرية 3.

نقول عن مجموعة X أنها **منتهية**، إذا حققت الخاصتين أ) و ب) ، وإذا لم تحقق ذلك فنقول عنها أنها **غير منتهية**. ونقول أيضاً عن كاردينال x أنه منتهي إذا كان $x \neq x + 1$ ونقول عنه أنه **غير منته** إذا كان $x = x + 1$. وكل كاردينال منته يسمى أيضاً عدد **طبيعي**، كما أن كل كاردينال غير منته يسمى عدد **سامي** أو **لا متناهي**.

وتتمتع الأعداد الطبيعية بخواص بسيطة (ومألوفة من طرف الجميع) . إذا كان x و y عددين طبيعيين فإن: الكاردينالات $x + y$ و xy و x^y هي أيضاً أعداد طبيعية؛ وبصورة أعم، إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ جماعة منتهية من الأعداد الطبيعية (نقول عن جماعة $(x_i)_{i \in I}$ أنها منتهية إذا كانت I مجموعة منتهية) ، فإن الكاردينالين (ملاحظة 8)

$$\sum_{i \in I} x_i \text{ و } \prod_{i \in I} x_i$$

هما أيضاً منتهيان.

إذا كان x عدداً طبيعياً، فإن كل كاردينال y بحيث $y \leq x$ هو أيضاً

منتهي (أي أن كل جزء من مجموعة منتهية يؤلف مجموعة منتهية)، ويوجد عندئذٍ كاردينال وحيد z بحيث

$$x = y + z \text{ ؛}$$

هذا وإن z منتهي، ويسمى **الفرق** بين x و y، ويرمز له

$$z = x - y \text{ ؛}$$

إذا كان $x = \text{Card } X$ و $y = \text{Card } Y$ حيث $Y \subset X$، فإنه يكون لدينا طبعاً $z = \text{Card }(X - Y)$.

أخيراً، إذا كان الأمر يتعلق بالكاردينالات المنتهية، فإن الظروف الخاصة التي تعرّضنا لها في الملاحظتين 3 و 5 لا يمكن لها أن تحدث؛ وبصورة أدق، فإن العلاقة $x + z = y + z$ تؤدي $x = y$ إذا كان z منتهياً، كما أن $xz = yz$ تؤدي $x = y$ إذا كان z منتهياً وغير معدوم.

نحتاج كثيراً للخاصة التالية:

نظرية 4 - إذا كانت X مجموعة و f تطبيقاً لـ X في X، فإن الخواص التالية متكافئة:

أ) f متباين

ب) f غامر

ج) f تقابل

يكفي إثبات التكافؤ بين أ) و ب). إذا كان f متبايناً فإن f تقابل بين X و $f(X)$، وتكون $f(X)$ متساوية القدرة مع X، وبما أن X منتهية و $f(X)$ جزء من X فإن $X = f(X)$، أي أن أ) تستلزم ب). إذا كان f غامراً، فإنه يوجد (ف 2، نظرية 4) تطبيق h من X في X بحيث $f \circ h = j_X$، و j_X هو التطبيق المطابق؛ ومن الواضح أن h متباين وبالتالي غامر لأننا أثبتنا أن أ) تستلزم ب)، ومنه نرى أن h تقابل، ويَكون f هو التطبيق العكسي لـ h وبالتالي فهو متباين، وبذلك ينتهي البرهان.

5. مجموعة الأعداد الطبيعية N

إن الاعتبارات السابقة تجعل وجود المجموعات المنتهية أمراً بديهياً ، إذ أن المجموعات التالية منتهية :

$$\Phi \text{ ، } \{\Phi\} \text{ ، } \{\Phi, \{\Phi\}\} \text{ ، } \left\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\right\} \text{ ، } \ldots$$

ومن هنا تأخذ الرياضيات بعض مادتها ، رغم أن كل ما سبق يعتمد على مفهوم المجموعة الخالية . . .

أما وجود مجموعات غير منتهية فهذا أمر غير بديهي ، وهو من مُسَلَّمات الرياضيات. ونشير إلى أن هدف الرياضيات هو إثبات القضيات منطقياً ، ومنه فإن كلمة «وجود» ليس لها المعنى المألوف بالفيزيا والعلوم الدينية . . .

نظرية 5 – إذا كانت X مجموعة غير منتهية فإن كل مجموعة منتهية تكون متساوية القدرة مع جزء من X .

ينبغي أن نثبت أن $y \leq x$ من أجل كل كاردينال منته y وكل كاردينال غير منته x . إن لم يكن كذلك فإننا نحصل على $x \leq y$ ويكون x بالتالي منتهياً حسب الفقرة السابقة .

نظرية 6 – توجد مجموعة وحيدة N بحيث يوجد تكافؤ بين $x \in$ N و x عدد طبيعي .
هذا وإن N مجموعة غير منتهية .

إن وحدانية N أمر بديهي حسب النظرية 2 ، ف 1 . أما وجود N فهو ناتج عن أنه إذا اخترنا كاردينال a غير منته (وهذا ممكن حسب مسلمة وجود مجموعات غير منتهية) ، فإن كل عدد طبيعي x يحقق $x < a$ كما رأينا آنفاً ؛ يكفي عندئذٍ أن نبرهن أنه من أجل كل كاردينال a فإن الكاردينالات x التي تحقق $x < a$ هي عناصر مجموعة ، ونقبل هذه النتيجة .(*)

(*) نضع $a = \text{Card } A$ ؛ إن الكائنات x بحيث $x < a$ هي في «تقابل» مع صفوف $\mathcal{P}(A)$ وفق علاقة التكافؤ $E_4(X, y)$ المعرّفة في الفقرة 1 ؛ وهذا ما «يفسر» كون الكائنات x تؤلف مجموعة .

لنفترض أخيراً أن N منتهية ، ومن أجل $n \in \mathbf{N}$ نعتبر مجموعة X_n بحيث $\text{Card } X_n = n$ ؛ بما أن N وكل X_n منتهية فإن $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ منتهية ، إذا كان $x = \text{Card } X$ ، فإن $n \leq x$ من أجل كل $n \in \mathbf{N}$ ؛ وبما أن x منتهي فإن $x + 1$ منتهي ، ومنه $x + 1 \leq x$ ، ولدينا أيضاً $x \leq x + 1$ أي $x = x + 1$ وهذا يناقض كون x منتهي .

نسمي Card N **بالقدرة القابلة للعد** ونقول عن مجموعة X أنها **قابلة للعد** إذا كان لدينا $\text{Card } X = \text{Card } \mathbf{N}$ ، أي إذا وجد تقابل $n \mapsto x_n$ من N في X .

مثال 1 - إن الأعداد الكسرية (ونفترض هذا المفهوم معروفاً) تؤلف مجموعة قابلة للعد . وللحصول على ذلك فإنه يكفي أن نثبت أنه يمكن كتابة الأعداد الكسرية (وهي تتعلق بعددين صحيحين) على شكل متتالية غير منتهية تحتوي كل عدد كسري مرّة واحدة . ويكون ذلك على النحو التالي :

$$\frac{0}{1} ؛ \frac{1}{1} ؛ \frac{1}{2} ؛ \frac{2}{1} ؛ \frac{1}{3} ، \frac{3}{1} ؛ \frac{1}{4} ؛ \frac{2}{3} ، \frac{3}{2} ، \frac{4}{1} ؛ \frac{1}{5} ، \frac{5}{1} ؛ \ldots$$

أي أننا نكتب أولاً الأعداد $\frac{p}{q}$ حيث $p + q = 1$ ، ثم الأعداد التي تحقق $p + q = 2$ والتي لم تكتب بعد ، ثم التي تحقق $p + q = 3$ والتي لم تكتب من قبل ، الخ . . .

إن الفكرة التي تنص على أن الأعداد الكسرية «ليست أكثر» من الأعداد الطبيعية تبدو منافية للتفكير السليم ؛ ولكن هذه النتيجة هي من أهم ما توصل إليه العالم كنتور الذي استطاع أن يبعد استعمال «التفكير السليم» عن الرياضيات .

ملاحظة 8 - ان الكاردينال $2^{\text{Card } \mathbf{N}}$ ، وهو قدرة $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ ، أكبر تماماً من Card N حسب الملاحظة 7 ؛ ونسميه قدرة الاستمرار . ويمكن أن نبرهن على أن $\text{Card } \mathbf{R} = 2^{\text{Card } \mathbf{N}}$ ، حيث R هي مجموعة الأعداد الحقيقية (أو مجموعة نقط مستقيم) .

ومنذ بداية هذا القرن حاول العلماء الرياضيين أن يبرهنوا على افتراض الاستمرار ، أي أن كل جزء من R غير منتهي هو متساوي القدرة مع R أو

مع N. وفي عام 1939 أثبت غودل (K. Gödel) أن افتراض الاستمرار، مثل مسلمة الاختيار (ف 2، ملاحظة 7)، منسجم من المسلمات الأخرى في نظرية المجموعات. وأخيراً (P. Cohen 1963) أمكن البرهان على أن افتراض الاستمرار مستقل عن مسلمة الاختيار. وكل هذه المسائل مدروسة في كتاب P. Cohen

Set Theory and the Continuum hypothesis (Benjamin, New York, 1966).

ونشير إلى أنه على الرغم من هذه النتائج الهامة فإن مسألة عدم تناقض نظرية المجموعات تبقى مفتوحة.

6. البرهان بالتدريج

يعتمد البرهان بالتدريج على النتيجة التالية:

نظرية 6 - لتكن $R\{n\}$ علاقة مشتملة على متحول $n \in \mathbf{N}$. نفترض أن العلاقة $R\{0\}$ محققة وأن العلاقة

$$R\{n\} \text{ تستلزم } R\{n+1\}$$

محققة من أجل كل $n \in \mathbf{N}$. عندئذٍ فإن $R\{n\}$ محققة من أجل كل $n \in \mathbf{N}$.

لتكن E مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تتحقق العلاقة $R\{n\}$: ينبغي أن نثبت أن $E = \mathbf{N}$ أو أن المجموعة $F = \mathbf{N} - E$ خالية.

لنفترض F غير خالية، عندئذٍ (ملاحظة 2) يوجد $a \in F$ بحيث $a \leq n$ مهما كان $n \in F$؛ وبما أن $R\{0\}$ محققة فرضاً فإن $0 \in E$ ومنه $a \geq 1$؛ إذن $a = n + 1$ من أجل عدد n من N، وبما أن $n < a$ فلا يمكن أن يكون لدينا $n \in F$ وبالتالي فإن $R\{n\}$ محققة؛ وبما أن $R\{n\}$ تستلزم $R\{n+1\}$ فرضاً فإن $R\{n+1\}$، أي $R\{a\}$، محققة وهذا مناقض مع $a \in F$. وبهذا ينتهي البرهان.

يمكن أن نعوض الشرط $R\{n\}$ تستلزم $R\{n+1\}$ بالشرط التالي:

إن ربط العلاقات $R\{1\}$ ، ... ، $R\{n\}$ يستلزم $R\{n+1\}$ ،

ونحصل على شكل آخر للنظرية 6 يمكن استعماله في المجال العملي (إذ أنه من أجل إثبات $R\{n+1\}$ قد نحتاج ليس فقط إلى $R\{n\}$ بل إلى كل $R\{p\}$ حيث $p \leq n$) .

مثال 2 - من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بـ E_n لمجموعة الأعداد الطبيعية x بحيث $x \leq n$ ؛ نهدف البرهان بالتدريج على أن

$$\text{Card } E_n = n + 1$$

من أجل كل n . بالفعل ، من أجل $n = 0$ فإن $E_0 = \{0\}$ ومنه $\text{Card } E_0 = 1$. بقي إثبات أن صحة القضية من أجل n تستلزم صحتها من أجل $n + 1$. ليكن x بحيث $x \leq n + 1$ ؛ يكون $x \leq n$ ، وعندئذٍ $x \in E_n$ ، أو

$$n < x \leq n + 1$$

وعند ذلك فإن $x = n + 1$ (أنظر أسفله) . ومنه فإن $E_{n+1} = E_n \cup \{n+1\}$ بحيث $\text{Card } E_{n+1} = (\text{Card } E_n) + 1$ ؛ ومنه فإن $\text{Card } E_n = n + 1$ تستلزم $\text{Card } E_{n+1} = n + 2$. ونرى أن $\text{Card } E_n = n + 1$ من أجل كل n .

هذا واننا قد استعملنا أعلاه أن العلاقة $n < x \leq n + 1$ تستلزم $x = n + 1$. ويمكن إثبات ذلك على النحو التالي: لتكن A مجموعة بحيث $\text{Card } A = n + 1$ ؛ وبما أن $x \leq n + 1$ ، فإنه يوجد X بحيث $x = \text{Card } X$ و $X \subset A$ ؛ وبما أن $n < x$ فانه يوجد B بحيث $n = \text{Card } B$ و $B \subset X$ و $B \neq X$.

لدينا $n + 1 = \text{Card } A = \text{Card } B + \text{Card}(A - B) = n + \text{Card}(A - B)$

وبالتالي $\text{Card}(A - B) = 1$ ، ومنه فإن متممة B بالنسبة لـ A تتألف من عنصر وحيد . وبما أن X تحتوي B وتختلف عنها ، فإن $X = A$ وبالتالي $x = n + 1$ كما أعلن .

7. التحليل التوافقي

في كل مايلي نسمي مجموعة ذات n عنصر كل مجموعة X بحيث $\text{Card } X = n$ حيث n عدد طبيعي.

نظرية 7 – (مبدأ الرّعاة). ليكن f تطبيقاً من مجموعة X في مجموعة Y. نفترض أن Y مجموعة ذات q عنصر، وأنه من أجل كل $y \in Y$ تكون $f^{-1}(y) \subset X$ ذات p عنصر، وأن f غامر. تكون عندئذٍ X مجموعة ذات pq عنصر.

نختار بصفة نهائية مجموعة F ذات p عنصر، ومن أجل كل $y \in Y$ نختار تقابلاً u_y من المجموعة F في المجموعة $f^{-1}(y)$. ونعرّف تطبيقاً

$$u : Y \times F \to X$$

بوضع

$$u(y, z) = u_y(z) \quad \text{من أجل كل } y \in Y \text{ و } z \in F\text{؛}$$

واعتماداً على أن f غامر، فإنه يمكن التحقق من أن u تقابل. وبالتالي

$$\text{Card } X = \text{Card}(Y \times F) = \text{Card } Y \cdot \text{Card } F = qp$$

وبذلك ينتهي البرهان.

نظرية 8 – لتكن X مجموعة ذات p عنصر و Y مجموعة ذات q عنصر. عندئذٍ تكون مجموعة تطبيقات Y في X ذات p^q عنصر.

هذه النظرية هي في الواقع (رقم 3) تعريف p^q. وحتى تكون لها فائدة فإنه ينبغي التأكد من أن عملية الأس هذه، هي العملية المـألوفة. وحسب الدستور (13) من الفقرة 3 يكون لدينا

$$n^1 = n \text{ ، } n^0 = 1 \text{ ، } n^{p+q} = n^p \cdot n^q \text{ ؛}$$

ومنه،

$$n^2 = n \cdot n \text{ ، } n^3 = n^2 \cdot n = n\,n\,n \text{ الخ} \ldots$$

ملاحظة 9 – لتكن Y هي مجموعة الأعداد الطبيعية i بحيث $1 \leq i \leq q$؛ كل تطبيق لـY في X يكون في الواقع جماعة $(x_i)_{i \in Y}$ من عناصر X ؛ وهذه الجماعة تكتب عادة على الصورة

$$(x_i)_{1 \leq i \leq q}$$

وتسمى في الاصطلاحات القديمة : **ترتيبة q عنصر من X** . وتنص النظرية 8 على أنه إذا كان $\text{Card } X = p$ فإن عدد هذه الترتيبات هو p^q .

نظرية 9 – لتكن X مجموعة ذات p عنصر وY مجموعة ذات q عنصر. نفترض أن $p \leq q$. عندئذٍ فإن عدد تباينات X في Y يكون

$$\frac{q!}{(q-p)!}$$

حيث نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$$n! = 1.2 \ldots n \text{ إذا كان } n \neq 0 \text{ ، و } n! = 1 \text{ إذا كان } n = 0 .$$

إذا كان $p = 0$ فإن X مجموعة خالية ويوجد عندئذٍ تباين وحيد من X في Y بحيث تتحقق النظرية في هذه الحالة. بقي أن نثبت (نظرية 6) أنه إذا تحققت النظرية 9 من أجل عدد طبيعي p فهي تحقق بالنسبة لـ$(p+1)$.

نفترض إذن أن $\text{Card } X = p + 1$ و $\text{Card } Y = q \geq p + 1$. ونختار في البداية ونهائياً عنصراً a من X ونضع $X' = X - \{a\}$ بحيث يكون $\text{Card } X' = p$. لتكن I مجموعة تباينات X في Y . وبإمكاننا تعريف تطبيق $u : I \to Y$ بوضع $u(f) = f(a)$ من أجل كل $f \in I$، ومن الواضح أن u تطبيق غامر من I في Y (أي أنه من أجل كل $b \in Y$ يوجد تطبيق متباين f من X في Y بحيث $f(a) = b$) . من أجل $b \in Y$ معطى، نعتبر التطبيقات $f \in I$ التي تحقق $f(a) = b$؛ لنضع $Y' = Y - \{b\}$ ، ونرى أن كل تطبيق f من التي اعتبرناها يكون مقصوره f' تبايناً من X' في Y' ، وعكسياً فإن كل تباين f' من X' في Y' يمكن توسيعه إلى تباين f من X في Y بحيث $f(a) = b$. واعتماداً على افتراض التدريج، نرى أن عدد التطبيقات $f \in I$ بحيث $u(f)$ يكون معطى، ان هذا العدد يساوي

$$\frac{(q-1)!}{[(q-1)-(p-1)]!}=\frac{(q-1)!}{(q-p)!}\text{؛}$$

وبما أن $u: I \to Y$ غامر، فإن النظرية 7 تنص على أن

$$\text{Card } I = q \cdot \frac{(q-1)!}{(q-p)!}$$

وبما أن $q! = q(q-1)!$، نرى أننا قد أتممنا البرهان.

نتيجة - إذا كانت X مجموعة بحيث $\text{Card } X = n$، فإن عدد تباديل X يساوي $n!$.

كل تبديل لـX هو تقابل من X في X (ف 2، رقم 8)، وبما أن X مجموعة منتهية فإن تباديل X هي كل التباينات من X في X (نظرية 4). بقي عندئذٍ تطبيق النظرية بأخذ $X = Y$ و $p = q = n$ وملاحظة أن $(n-n)! = 0! = 1$.

إن العدد $n!$ يقرأ n **عاملي**. ولدينا العلاقات

$$0! = 1 \text{، } 1! = 1 \text{، } 2! = 2 \text{، } 3! = 6 \text{، } 4! = 24 \text{، } 5! = 120 \text{، } \ldots$$

نظرية 10 - لتكن X مجموعة ذات n عنصر و p عدداً طبيعياً بحيث $n \geq p$ إن عدد المجموعات الجزئية من X وذات p عنصر يساوي

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

نقوم باختيار نهائياً مجموعة E ذات p عنصر. لتكن I مجموعة تباينات E في X و P مجموعة أجزاء X ذات p عنصر. بإمكاننا تعريف تطبيق $u: I \to P$، بحيث $u(f) = f(E)$. وهذا التطبيق غامر لأن كل جزء Y من X بحيث $\text{Card } Y = p$ يكون متساوي القدرة مع E وبالتالي مع صورة E. وفق كل تباين من E في X.

نقوم الآن بحساب عدد التطبيقات $f \in I$ التي تحقق $f(E) = Y$، حيث Y جزء من X معطى مسبقاً. إذا كان f_0 تطبيقاً من هذا الصنف، فإنه يمكن

الحصول على كل التطبيقات الأخرى بتركيب f_0 مع تبديل كيفي لـ E : إذا كان $f(E) = f_0(E)$ ، فإنه يوجد من أجل كل $x \in E$ عنصر وحيد $s(x) \in E$ بحيث $f(x) = f_0(s(x))$ ، حيث s هي بطبيعة الحال تبديل لـ E . وهكذا إذا رافقنا كل تبديل s لـ E بالتطبيق $f = f_0 \circ s$ من E في X ، فإننا نحصل على تقابل من مجموعة تباديل E في مجموعة التطبيقات $f \in I$ التي تحقق $f(E) = Y$.

إن التطبيقات $f \in I$ التي تحقق $f(E) = Y$ ، حيث Y معطى، يكون عددها $p!$ (نتيجة النظرية 9) . وحسب النظرية 7 يكون لدينا

$$\text{Card } I = p! \text{ Card } P ;$$

وبالتالي

$$\text{Card } P = \frac{\text{Card } I}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

حسب النظرية 9، وبهذا ينتهي البرهان.

نضع عادة

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

وهذه الأعداد الصحيحة تسمى أمثال ذي الحدين، وسنرى السبب في ف 8، رقم 4.

ملاحظة 10 - إن كل جزء من X مؤلفاً من p عنصر يسمى **توفق p عنصر من X** ، حسب الاصطلاح القديم. ويعرف هذا التوفيق «بمتتالية»

$$x_1, \ldots, x_p$$

من عناصر X ومختلفة مثنى مثنى، حيث لا نفرّق بين متتاليتين مؤلفتين من نفس العناصر مع اختلاف ترتيبها. ومن الأوضح بطبيعة الحال استخدام مصطلحات نظرية المجموعات.

8. الأعداد الصحيحة الناطقة (*)

نحتاج في الرياضيات، بالإضافة إلى الأعداد الطبيعية، إلى الأعداد الصحيحة «ذات إشارة كيفية»، ونسميها: الأعداد الصحيحة الناطقة (أو الأعداد الصحيحة). وسنرى بصورة موجزة كيف يمكن تعريفها.

والفكرة الأساسية هي: إذا كان x و y عددين طبيعيين فإنه يوجد عدد صحيح ناطق z بحيث

$$x + z = y$$

- وقد تم اختراع الأعداد الصحيحة السالبة لجعل عملية الطرح ممكنة. وإذا افترضنا أنه تم انشاء مجموعة الأعداد الصحيحة الناطقة $\mathbf{Z}$ فإنه من الممكن تعريف تطبيق غامر

$$D : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$$

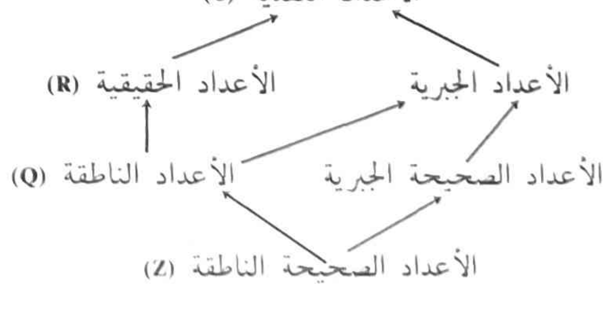
حيث $D(x, y) = x - y$.

ومن الواضح أن العلاقة $D(x, y) = D(x', y')$ تكافئ $x + y' = x' + y$.

وهذه الملاحظات تفسّر الطريقة التي سنتبعها لإنشاء $\mathbf{Z}$ (لا نفترض بطبيعة الحال أن المسألة قد تم حلها).

ننطلق من المجموعة $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ونعرّف عليها علاقة تكافؤ R كما يلي

(*) نستعمل عبارة «الأعداد الصحيحة الناطقة» لأن عبارة «الأعداد الصحيحة الجبرية» تستعمل في معنى آخر (ف 11، مثال 11، وتمارين ف 26). ولدينا الاحتواءات التالية



ويعني كل سهم أن مجموعة الانطلاق محتواة في مجموعة الوصول.

نقول عن الزوجين (x, y) و (x', y') من الأعداد الطبيعية أنهما متكافئان إذا وإذا فقط كان لدينا

$$x' + y = x + y' ؛$$

ونترك للقارئ إثبات أن R علاقة تكافؤ. نضع بالتعريف

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{N} \times \mathbf{N})/R$$

وكل عنصر من $\mathbf{Z}$ يسمى عدد صحيح ناطق.

ينبغي أن نعرّف العمليات الجبرية على الأعداد الصحيحة الناطقة، وأن نرى أن الأعداد الطبيعية تعتبر أعداد صحيحة خاصة. ليكن D التطبيق القانوني (ف4، رقم 2) من $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ في $\mathbf{Z}$؛ لأجل تعريف مجموع وجداء عددين صحيحين z و z'، نختار زوجين (x, y) و (x, y) من $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بحيث

$$z = D(x, y) \text{ و } z' = D(x', y') ،$$

ونضع(*)

$$z + z' = D(x + x', y + y')$$
$$zz' = D(xx' + yy', xy' + x'y) ؛$$

وبإمكاننا أيضاً تطبيق النظرية 3، ف4 حيث نأخذ

$$X = Y = Z = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ و } R = S = T$$

ويكون التطبيق $f: X \times Y \to Z$ معرّفاً بـ

$$f((x, y), (x', y')) = (xx' + yy', xy' + x'y) .$$

ينبغي أن نتأكد من صحة الشرط أ) من النظرية 3 المذكورة؛ أي أنه ينبغي أن نثبت أن العلاقتين

$$(x, y) \equiv (u, v)\,(R) \text{ و } (x', y') \equiv (u', v')\,(R)$$

(*) نفسّر هذه الطريقة باننا نريد الوصول إلى العلاقتين

$$(x - y) + (x' - y') = (x + x') - (y + y')$$
$$(x - y) \cdot (x' - y') = (xx' + yy') - (xy' - x'y) .$$

تؤديان إلى

$$(x+x', y+y') \equiv (u+u', v+v')\,(R)$$

وإلى

$$.\ (xx'+yy', xy'+x'y) \equiv (uu'+vv', uv'+u'v)\,(R)$$

وحسب تعريف العلاقة R فإن المسـألة تعود إلى إثبات أنه من أجل كل أعداد طبيعية x ، y ، x' ، y' ، u ، v ، u' ، v' ، فإن العلاقتين

$$x+v=y+u \quad \text{و} \quad x'+v'=y'+u'$$

تستلزمان العلاقتين

$$x+x'+v+v' = y+y'+u+u'$$

و $$xx'+yy'+uv'+u'v = xy'+x'y+uu'+vv' \text{ ،}$$

ومن السهل إثبات ذلك.

بعد أن عرّفنا على $\mathbf{Z}$ عملية الجمع وعملية الضرب، بقي أن نرى خواصهما الأسـاسية، وهي:

(I) لدينا $x+y=y+x$ و $x+(y+z) = (x+y)+z$ من أجل كل x و y و z في $\mathbf{Z}$. ويوجد في $\mathbf{Z}$ عنصر وحيد نرمز له بـ0 ويحقق $x+0=x$ مهما كان $x \in \mathbf{Z}$.

(II) من أجل كل $x, y \in \mathbf{Z}$ يوجد $z \in \mathbf{Z}$ وحيد بحيث $y = z + x$.

(III) لدينا $xy = yx$ و $x(yz) = (xy)z$ من أجل كل x و y و z في $\mathbf{Z}$. ويوجد في $\mathbf{Z}$ عنصر وحيد نرمز له بـ1 ويحقق $1x = x$ من أجل كل $x \in \mathbf{Z}$.

(IV) لدينا $x(y+z) = xy + xz$ من أجل كل $x, y, z \in \mathbf{Z}$.

لنرى مثلاً كيف نثبت (IV). نختار أزواجاً في $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ بحيث

$$x = D(x', x'') \text{ ، } y = D(y', y'') \text{ ، } z = D(z', z'') \text{ ؛}$$

ويكون لدينا عندئذٍ

$$x(y+z) = D(x', x'')\, D(y'+z', y''+z'')$$

$$= D[x'(y'+z') + x''(y''+z'') \text{ و } x'(y''+z'') + x''(y'+z')]$$

و

$$xy + xz = D(x'y' + x''y'', x'y'' + x''y') + D(x'z' + x''z'', x'z'' + x''z')$$

$$= D(x'y', + x''y'' + x'z' + x''z'', x'y'' + x''y' + x'z'' + x''z')$$

وبمقارنة العلاقتين نحصل على (IV).

بقي لنا أن نطابق كل عدد طبيعي n مع عدد صحيح ناطق، ألا وهو العدد الصحيح الناطق

$$D(n, 0) \text{ ؛}$$

نتحقق بسهولة من أن التطبيق $n \mapsto D(n, 0)$ من **N** في **Z** متباين ومنسجم مع العمليات الجبرية المعرّفة على **N** وعلى **Z**، وبذلك يمكن لنا أن نعتبر **N** جزء من **Z**.

بعد هذا العمل، نلاحظ أنه من أجل كل عددين طبيعيين x و y، يكون لدينا

$$D(x, y) = D(x, 0) - D(y, 0)$$

(مع العلم أن الفرق $a - b$ بين عددين صحيحين a و b، هو بالتعريف العدد الصحيح الوحيد c الذي يحقق $a = b + c$: أنظر الخاصة (II) أعلاه)؛ بالفعل

$$D(x, y) + D(y, 0) = D(x + y, y)$$

بحيث تعود كل المسألة إلى إثبات أن $D(x + y, x) = D(x, 0)$، أي

$$(x + y) + 0 = y + x$$

وهذا بديهي. وإذا وضعنا من أجل كل $x \in \mathbf{N}$

$$D(x, 0) = x \text{ ،}$$

نرى أن العلاقة السابقة تكتب على الصورة $D(x, y) = x - y$ مما يظهر أن كل عدد صحيح ناطق هو الفرق بين عددين طبيعيين.

إذا كان z عدداً صحيحاً ناطقاً، إن العدد الصحيح $0 - z$ يرمز له $-z$ ويسمى نظير z، وهو بالتالي متميز بالعلاقة

$$z + (-z) = 0 \text{ ،}$$

ومن الواضح أن $-z = y - x$ إذا كان $z = x - y$.

لنكتب الآن $z = x - y$ حيث $x, y \in \mathbf{N}$، هناك حالتان ممكنتان:

إمّا أن $x \geq y$، يوجد عندئذٍ $z' \in \mathbf{N}$ بحيث $x = y + z'$ وبما أن العلاقة هذه محققة أيضاً في $\mathbf{Z}$ فإننا نرى، حسب وحدانية الفرق في $\mathbf{Z}$، أن $z = z'$، أي أن $z \in \mathbf{N}$.

وإذا كان لدينا $y \geq x$، فإن العلاقة $-z = y - x$ تبيّن أن $-z \in \mathbf{N}$. لدينا بتعبير آخر، مهما كان $z \in \mathbf{Z}$ فإن $z \in \mathbf{N}$ أو $-z \in \mathbf{N}$.

إن الأعداد الصحيحة z التي تحقق $z \in \mathbf{N}$ تسمى **موجبة**، أما الأعداد الصحيحة الأخرى فتسمى **سالبة**. إذا كان x و y عددين صحيحين فإننا نكتب $x \leq y$ إذا كان $y - x$ موجباً، بحيث تتميز الأعداد الصحيحة الموجبة $z \in \mathbf{N}$ بالعلاقة $z \geq 0$.

ونتحقق بسهولة في المجموعة $\mathbf{Z}$ ان العلاقة $x \leq y$ تتمتع بالخواص «البديهية»، وهي العلاقات:

$x \leq y$ و $y \leq z$ تستلزمان $x \leq z$،
$x = y$ إذا وإذا فقط كان لدينا $x \leq y$ و $y \leq x$،
من أن أجل كل x و y، لدينا $x \leq y$ أو $y \leq x$،
$x \leq y$ تكافئ $x + z \leq y + z$
$x \leq y$ تكافئ $xz \leq yz$ إذا كان $z > 0$ و $xz \geq yz$ إذا كان $z < 0$.

قد نستعمل في المستقبل بعض الخواص التي لم نتعرض لها في ما سبق، وسنقوم ببرهان كل خاصة غير بديهية. وننصح القارئ عدم محاولة تعميق

المفاهيم المقدّمة في هذه الفقرة إذ الهدف منها هو تبرير بعض النتائج المألوفة. وإن أراد القارئ تعميق فهمه لبعض نظريات هذا الكتاب فإنه يكون مفيداً له كتابة دقيقة وكاملة كل البراهين التي أهملناها أو أعطيناها بإيجاز في هذه الفقرة.

9. الأعداد الناطقة

بعد أن أنشأنا مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الصحيحة، فإنه من الضروري إنشاء **مجموعة الأعداد الناطقة**، أي مجموعة الكسور $\frac{p}{q}$ حيث p و q عددين صحيحين مع $q \neq 0$. ونرمز بـ **Q** لمجموعة الأعداد الناطقة.

ومع هذا فإننا لن نقوم بإنشاء **Q** انطلاقاً من **Z**؛ ويتم هذا الإنشاء بطرق مماثلة للتي اتبعناها بصدد إنشاء **Z** انطلاقاً من **N**؛ وسنقوم بذلك في الفصل 29 حيث ندرس المسألة بوجهة نظر عامة.

وننصح القارئ أن يقبل الخواص البديهية للأعداد الناطقة أو أن ينتقل مباشرة إلى الفصل 29 بعد قراءة الفصول 6 و 7 و 8 التي تكون ضرورية لفهم الفصل 29.

الزمر، الحلقات، الحقول

كل منا يعلم أن العمل في الجبر هو حسابات، وبينما يكمن الجبر التقليدي في عمليات حساب الأعداد، فإن تطورات الرياضيات في القرنين الأخيرين فرضت أكثر فأكثر على الرياضيين (والفيزيائيين) أن يقوموا بعمليات الحساب على كائنات رياضية جد متنوعة، وأن يفصلوا الحالات التي تعترضهم باستمرار. وهذا ما أدى لمفاهيم «مجرّدة» للزمرة والحلقة والحقل. وقد طرح المفهوم الأول بالهندسة (زمر التحويلات: الدورانات، الانسحابات، التحويلات التناظرية، الخ...)، وبنظرية الحساب (دراسة غوس Gauss وديريكلاي Dirichlet وهيرميت Hermite حول «وحدات الأشكال التربيعية» - ويتعلق الأمر بأنه إذا كان لدينا كثير حدود من الدرجة الثانية، متجانساً وبأمثال صحيحة، فإننا نبحث عن كل التعويضات الخطية ذات الأمثال الصحيحة، التي يمكن القيام بها على المتحولات دون تغيير شكل كثير الحدود المعطى)، وبالجبر (زمر غالوا Galois بصدد دراسة المعادلات الجبرية)، وبالتحليل (زمر لي Lie)، التوابع المتشاكلة ذاتياً)، وبالفيزياء (زمر لورنتز Lorentz)، وهكذا يأخذ مفهوم الزمرة في الرياضيات مكاناً مماثلاً لمفهوم المجموعة والتطبيق. أما مفهوم الحلقة ومفهوم الحقل فقد أدخلا في القرن الماضي (خاصة من طرف ديدكند Dedekind)، بصدد دراسة الأعداد الجبرية، وتستعمل كثيراً حالياً في كل فروع الجبر ونظرية الحساب، وبعض فروع التحليل حيث تمكن من الحصول على مصطلحات مناسبة.

ونجد بعد ذلك فصلاً حول «الأعداد العقدية» وإن كانت قليلة الأهمية بالجبر فإنه من المستحيل عملياً القيام بأي شيء بالتحليل دون استخدام

الأعداد العقدية. هذا وإن طرق إنشاءها تستعمل في الجبر «العالي» بصدد الحصول على تعميمات كبيرة.

ف 6. قوانين التشكيل

1. قوانين التشكيل؛ التجميع والتبديل

لتكن X مجموعة؛ نسمي قانون تشكيل على X كل تطبيق من مجموعة الجداء $X \times X$ في المجموعة X ذاتها. وهكذا فإن كل قانون تشكيل على X يمكن حدسياً في مقابلة كل زوج (x, y) من عناصر X بعنصر ثالث من X لا يتعلق سوى بـx وبـy ضمن قانون معطى مسبقاً.

ونستعمل في المجال العملي، لتعيين قوانين التشكيل، إشارات من النوع $(x, y) \mapsto x + y$ أو $(x, y) \mapsto xy$، أو $(x, y) \mapsto x \wedge y$، الخ . . . ونستخدم كثيراً في هذا الفصل الإشارة $\perp$، الغير مستخدمة حالياً في الرياضيات (ويمكنها بالتالي تعيين أي قانون تشكيل).

ليكن $(x, y) \mapsto x \perp y$ قانون تشكيل على مجموعة X. نقول عن هذا القانون أنه **تجميعي** إذا كان لدينا:

$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$ من أجل كل x وَ y وَ z في X.

وعندئذٍ، إذا كانت لدينا عناصراً x_1، x_2، ...، x_n من X، وعددها كيفي، فإننا نضع بالتعريف

$$x_1 \perp x_2 \perp \dots \perp x_n = (x_1 \perp \dots \perp x_{n-1}) \perp x_n$$

(بالتدريج بالنسبة لـ n)، ونحصل على العلاقة:

$$x_1 \perp \dots \perp x_n = (x_1 \perp \dots \perp x_p) \perp (x_{p+1} \perp \dots \perp x_n)$$

من أجل كل عدد طبيعي p بحيث $1 \leq p \leq n$.

نفترض أن لدينا قانون تشكيل يرمز له $(x, y) \mapsto xy$ مثل الضرب - نقول عندئذٍ أننا استعملنا **الكتابة الضربية**. من أجل كل $x \in X$ من أجل كل عدد صحيح $n \geq 1$، نعرّف **القوة النونية** لِـ x بالدستور

$$x^n = \underbrace{x x \ldots x}_{n \text{ مرّة}} ،$$

ويكون لدينا عندئذٍ:

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$

من أجل كل عددين طبيعيين p، $q \geq 1$.

وإذا استعملنا الرّمز $(x, y) \mapsto x + y$ للقانون المعتبر، ونقول أننا استعملنا **الكتابة الجمعية** فإننا نعرّف:

$$n x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ مرّة}}$$

من أجل كل $x \in X$ وكل عدد صحيح $n \geq 1$، وبطبيعة الحال فإن الفرق بين هذا الرّمز المستعمل في تعريف القوّة، يكمن في الاصطلاحات التي نعتبرها. ويكون لدينا أيضاً:

$$px + qx = (p + q)\, x$$

وهي كتابة جمعية للدستور الذي تعرضنا له آنفاً.

نعود إلى قانون تشكيل $(x, y) \mapsto x \perp y$ معرّف على مجموعة X. نقول عن هذا القانون أنه **تبديلي** إذا كان لدينا:

$x \perp y = y \perp x$ من أجل كل x وَ y في X.

وقد نستعمل الكتابة الضربية عندما يكون القانون تبديلياً أو غير تبديلي، أما الكتابة الجمعية فلاتستعمل إلا بصدد القوانين التبديلية.

ليكن $(x, y) \mapsto x \perp y$ قانون تشكيل على X تبديلياً وتجميعياً، ولتكن $(x_i)_{i \in I}$ جماعة منتهية من عناصر X. ليكن n عدد عناصر I ولنكتب هذه العناصر على شكل متتالية i_1، i_2 ... ، i_n؛ إن عنصر X:

$$x_{i_1} \perp x_{i_2} \perp \dots \perp x_{i_n}$$

لا يتعلق بالطريقة التي نرتب بها عناصر I (وذلك لأن القانون المعتبر تبديلي وتجميعي) . نضع عندئذٍ بالتعريف :

$$\underset{i\in I}{\perp} x_i = x_{i_1} \perp \dots \perp x_{i_m}$$

وإذا استعملنا الكتابة الضربية للقانون المعتبر فإننا نضع :

$$\prod_{i\in I} x_i = x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

أما إذا كتبناه جميعاً فإننا نستعمل الرمز

$$\sum_{i\in I} x_i = x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

ملاحظة 1 - هذا وإن الرموز المختصرة التي أدخلناها تتغير كثيراً حسب استعمالها . وعلى سبيل المثال إذا كانت I هي المجموعة المؤلفة من الأعداد 1، 2، ...، n، فإننا نكتب عادة :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \text{ ؛}$$

أو :

$$= \sum_{1\leq i\leq n} x_i$$

وإذا كانت I هي المجموعة المؤلفة من الأزواج (i,j) حيث i وَ j عددين طبيعيين يحققان $1 \leq i \leq p$ و $1 \leq i \leq q$، وإذا كان x_{ij} هو الحد «العام» للجماعة المعتبرة فإننا نستعمل عادة الرّمز :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} x_{ij} \quad \text{عوضاً عن} \quad \sum_{(i,j)\in I} x_{ij}$$

وفي هذه الحالة نلاحظ أن خاصة تجميع قانون التشكيل تكتب على الصورة :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} x_{ij} = \sum_{1\leq i\leq p}\left(\sum_{1\leq j\leq q} x_{ij}\right)$$

حيث نعني بالطرف الأيمن المجموع :

$$(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1q}) + \dots + (x_{p1} + x_{p2} + \dots + x_{pq})$$ ؛

وفي كثير من الأحيان يكون من الضروري استخدام هذه الرموز المختصرة حتى نتجنب الدساتير المعقدة.

ونشير أخيراً بالنسبة للرّمز :

$$\sum_{i \in I} x_i$$

إلى أن الحرف i لا يلعب أي دور ولا يدخل فعلاً في النتيجة - وهدفه الوحيد هو الإشارة إلى عملية ينبغي القيام بها (وهي أخذ مجموعة العناصر x_i التي نحصل عليها عندما نغيّر i في I)، ويمكن أن نعوض i بأي حرف آخر غير مستخدم في مكان آخر (حتى نتجنب أي التباس).

نعود إلى قانون تشكيل كيفي على مجموعة X. نسمي **عنصراً حيادياً** لهذا القانون $(x, y) \mapsto x \perp y$ كل عنصر $e \in X$ بحيث يكون لدينا $x \perp e = e \perp x = x$ من أجل $x \in X$.

نظرية 1 - إذا كان قانون تشكيل يقبل عنصراً حيادياً، فإنه يقبل عنصراً حيادياً وحيداً.

نفترض أن e' وَ e'' عنصران حياديان، إن الدستور $e' \perp x = x$ يعطي بصفة خاصة $e' \perp e'' = e''$، كما إن الدستور $x \perp e'' = x$ يعطي $e' \perp e'' = e'$؛ وبالتالي $e' = e''$ ومنها النظرية.

لنأخذ الآن بعض الأمثلة الهامة لقوانين التشكيل.

مثال 1 - نعرّف على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$ ثلاثة قوانين تشكيل مألوفة من طرف الجميع : الجمع $(x, y) \mapsto x + y$، وهو تبديلي وتجميعي ويقبل عنصراً حيادياً (وهو العدد 0)؛ الضرب $(x, y) \mapsto xy$، وهو تبديلي وتجميعي ويقبل عنصراً حيادياً (وهو العدد 1)؛ وأخيراً الطرح $(x, y) \mapsto x - y$ وهو غير تبديلي وغير تجميعي ولايقبل عنصراً حيادياً.

وفي هذه المثال يمكن أن نعوض $\mathbf{Z}$ بمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbf{Q}$ أو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.

مثال 2 – لتكن $\mathbf{Q}^*$ مجموعة الأعداد الناطقة غير المعدومة، إن الضرب $(x, y) \mapsto xy$ قانون تشكيلي (تجميعي وتبديلي ويقبل عنصراً حيادياً) على $\mathbf{Q}^*$، كما ان القسمة $(x, y) \mapsto x/y$ قانون تشكيل (غير تبديلي وغير تجميعي ولايقبل عنصراً حيادياً) . وينبغي أن نلاحظ أن القسمة لا تعرّف قانون تشكيل على $\mathbf{Q}$، مجموعة كل الأعداد الناطقة، لأنه لا يمكن تعريف x/y من أجل $y = 0$ بحيث لا يمكن أن نعرّف $(x, y) \mapsto x/y$ على $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ بكاملها .

مثال 3 – نأخذ $X = \mathbf{N}$، مجموعة الأعداد الطبيعية، والتطبيقين $(x, y) \mapsto ppcm(x, y)$ وَ $(x, y) \mapsto pgcd(x, y)$ ؛ ونرى أنهما قانونا تشكيل تبديليان وتجميعيان، ويقبل الأول عنصراً حيادياً أما الثاني فهو لا يقبل عنصراً حيادياً (على القارئ أن يثبت هذه النصوص بنفسه كتمرين) .

مثال 4 – لتكن E مجموعة ما و X مجموعة كل تطبيقات E في E ؛ إن التطبيق $(f, g) \mapsto f \circ g$ من $X \times X$ في X هو قانون تشكيل على X، وهو تجميعي (ف 2، نظرية 2)، ويقبل عنصراً حيادياً (التطبيق المطابق j_E)، لـكنه غير تبديلي .

مثال 5 – لتكن E مجموعة كيفية وَ $X = \mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء E، عندئذٍ فإن التطبيقين $(x, y) \mapsto x \cap y$ وَ $(x, y) \mapsto x \cup y$ يعرّفان قانوني تشكيل على X تجميعيين وتبديليين حسب دساتير ف 3، رقم 1، ويقبل الأول E كعنصر حيادي أما الثاني فعنصره الحيادي هو المجموعة الخالية .

مثال 6 – لتكن X مجموعة الأشعة المنطلقة من النقطة 0 في الفراغ (حسب المعنى المألوف)، نرافق كل شعاعين x وَ y منطلقين من 0، بجداءهما «الشعاعي» (ونرمز له $x \wedge y$) .

ونحصل بذلك على قانون تشكيل غير تجميعي وغير تبديلي .

2. العناصر القابلة لنظير

ليكن $(x, y) \mapsto x \perp y$ قانون تشكيل على مجموعة X ، يقبل عنصراً حيادياً e . إذا كان لدينا عنصراً $x \in E$ ، نسمي **نظيره x من اليسار** (وعلى التوالي نظير x من اليمين) كل عنصر $x' \in X$ بحيث $x' \perp x = e$ (على التوالي $x \perp x' = e$) :

ونسمي **نظير** x كل عنصر x' بحيث :

$$x' \perp x = x \perp x' = e \text{ .}$$

وإذا كان قانون التشكيل معطى بكتابة ضربية فإننا نستعمل كلمة مقلوب عوضاً عن كلمة نظير ، وإذا كان عنصر x يقبل نظير فنقول عنه **قابل للقلب** [إذا اعتبرنا مثلاً القانون $(x, y) \mapsto xy$ على المجموعة $\mathbf{Q}$ ، فإن العناصر القابلة للقلب هي الأعداد الناطقة غير المعدومة ، وإذا كان x أحدها فإن مقلوبه هو $\frac{1}{x}$] ، وبصفة عامة إذا كان عنصر x قابلاً للقلب فإننا نرمز لمقلوبه بِـ :

$$x^{-1}$$

وإذا كان قانون التشكيل معطى بكتابة جمعية ، وإذا كان عنصره x يقبل نظير فإننا نرمز لهذا الأخير بِـ :

$$-x$$

(على الأقل إذا كان 0 هو العنصر الحيادي ، وهذا ما يحدث في كل الحالات تقريباً ، عندما تكون الكتابة جمعاً) .

نلاحظ أخيراً أن التميز بين النظير من اليسار ومن اليمين لا يكون له فائدة إلا بالنسبة للقوانين غير التبديلية :

لنأخذ الآن مثالاً يوضح أن المفاهيم الثلاثة مختلفة في الحالة غير التبديلية .

مثال 7 – نعتبر قانون التشكيل المعرّف أعلاه في المثال 4. نقول عن عنصر $f \in X$ أنه قابل للقلب من اليسار إذا وجد $g \in X$ بحيث $g \circ f = j_E$ ونقول

عن f أنه قابل للقلب من اليمين إذا وجد $g \in X$ بحيث $f \circ g = j_E$ ؛ ويكون محققاً إذا وإذا فقط كان f متبايناً (ف 2 ، نظرية 3) . ونقول عن f أنه قابل للقلب من اليمين إذا وجد $g \in X$ بحيث $f \circ g = j_E$ ؛ ويكون ذلك محققاً إذا وإذا فقط كان f غامراً (ف 2 ، نظرية 4) . ونقول أخيراً عن f أنه قابل للقلب إذا كان f تقابلاً ، ويكون مقلوب f بالنسبة للقانون المعتبر هو التطبيق العكسي حسب المفهوم ف 2 .

نظرية 2 - ليكن $(x, y) \mapsto x \perp y$ قانون تشكيل على مجموعة X ، تجميعياً ويقبل عنصراً حيادياً . إن العنصر $x \in X$ يقبل نظيراً إذا وإذا فقط كان يقبل نظيراً من اليمين ونظيراً من اليسار ؛ وعندئذٍ فإن x يقبل نظيراً وحيداً ، وهو النظير الوحيد من اليمين ومن اليسار .

ليكن x' نظيراً لـ x من اليسار و x'' نظيراً لـ x ، من اليمين ؛ لدينا عندئذٍ $x' \perp x = x \perp x'' = e$ ، حيث e هو عنصر حيادي X ؛ وحسب خاصة التجميع ، نستنتج أن :

$$x'' = e \perp x'' = (x' \perp x) \perp x'' = x' \perp (x \perp x'') = x' \perp e = x'$$ ؛

وهكذا فإن كل نظير لـ x من اليسار يساوي نظير لـ x من اليمين مما يثبت أن x يقبل نظيراً وحيداً من اليمين ونظيراً وحيداً من اليسار وأن النظيرين متساويان ؛ لتكن x' قيمتهما المشتركة ، عندئذٍ $x' \perp x = x \perp x' = e$ ، أي أن x' هو نظير x ، وهكذا ينتهي البرهان .

نفترض حتى نهاية هذا الفصل أننا نعتبر قانوناً تجميعياً على E ويقبل عنصراً حيادياً e . وإذا كان العنصر $x \in E$ يقبل نظيراً ، فإنه بإمكاننا التحدث عن نظيره x ونرمز له بـ x' (أو x^{-1} إذا كانت الكتابة ضربية و $-x$ إذا كانت الكتابة جمعية) .

نظرية 3 - ليكن $x \in E$ ، إذا كان x يقبل نظيراً x' فإن x هو نظير لـ x' إذا كان عنصراً آخر $y \in E$ يقبل نظيراً y' ، فإن $x \perp y$ يقبل نظيراً ، ويكون لدينا :

$$(x \perp y)' = y' \perp x' .$$

إن الجزء الأول من النص بديهي نظراً لأن:

$$. x' \perp x = x \perp x' = e$$

ولأجل إثبات الجزء الثاني، نقوم بالحساب التالي:

$$،(y' \perp x') \perp (x \perp y) = y' \perp (x' \perp x) \perp y = y' \perp e \perp y = y' \perp y = e$$

$$،(x \perp y) \perp (y' \perp x') = x \perp (y \perp y') \perp x' = x \perp e \perp x' = x \perp x' = e$$

أي أن $x \perp y$ يقبل نظيراً، وهو $y' \perp x'$.

وفي الكتابة الضربية تكون النظرية 3 كالآتي: إذا كان x قابلاً للقلب فإن مقلوبه يكون قابلاً للقلب، ويكون لدينا:

$$؛(x^{-1})^{-1} = x$$

إذا كان x و y قابلين للقلب فإن xy قابل للقلب ويكون لدينا:

$$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$$

وفي الكتابة الجمعية يكون لدينا:

$$-(-x) = x$$

$$-(x + y) = (-x) + (-y)$$

وتكتب هذه العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$. -(x + y) = -x - y$$

نظرية 4 - ليكن $a \in E$؛ إذا كان a يقبل نظيراً a' فإنه من أجل كل $b \in E$، يوجد عنصر وحيد $x \in E$ بحيث:

$$a \perp x = b$$

وهذا العنصر هو:

$$. x = a' \perp b$$

بالفعل ، إن العلاقة $a \perp x = b$ تؤدي إلى $a' \perp (a \perp x) = a' \perp b$ أي أنه يكون لدينا :

$$a' \perp b = (a' \perp a) \perp x = e \perp x = x \text{ ،}$$

وعكسياً إذا كان $x = a' \perp b$ فإنه يكون لدينا :

$$a \perp x = a \perp (a' \perp b) = (a \perp a') \perp b = e \perp b = b$$

وبه ينتهي البرهان .

في الكتابة الضربية : إذا كان a قابلاً للقلب فإن المعادلة $ax = b$ تقبل حلاً وحيداً وهو $x = a^{-1} b$ ؛ وفي الكتابة الجمعية : إذا كان a يقبل نظيراً فإن المعادلة $a + x = b$ تقبل حلاً وحيداً وهو $x = b + (-a)$ (يكتب أيضاً على الشكل $x = b - a$) .

نشير أخيراً إلى أننا لن نستعمل بعد الآن الرموز $\perp$ ... بل نكتفي بالكتابة الضربية والكتابة الجمعية .

ف 7. مفهوم الزمرة

1. تعريف الزمرة؛ أمثلة

نعرّف **الزمرة** بزوج مُكوّن من مجموعة G وقانون تشكيل $(x, y) \mapsto xy$ في المجموعة G بحيث تتحقق الشروط التالية:

(a) مهما كان x و y و z في G فإن $(xy)\, z = x\,(yz)$ ؛ «تجميعية»

(b) يوجد عنصر e في G بحيث $ex = xe = x$ من أجل كل x في G (وجود عنصر حيادي).

(c) من أجل كل x في G فإنه يوجد عنصر x^{-1} في G بحيث $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ ، (وجود نظير لكل عنصر من G).

لايكفي إعطاء المجموعة G حتى نعرّف الزمرة، بل ينبغي أيضاً إعطاء قانون تشكيل داخلي يحقق الشروط السابقة (a) و (b) و (c).

نشير هنا إلى أنه على القارئ المبتدئ ألا «يقول» أن **الزمرة هي مجموعة** G «يوجد» فيها قانون تشكيل داخلي يحقق الشروط (a) و (b) و (c) السابقة. إذ أنه يمكن بسهولة إثبات أن كل مجموعة E يوجد فيها على الأقل قانون تشكيل من هذا النوع بل يوجد عدد غير منته من القوانين هذه إذا كانت E غير منتهية. ولذلك فإن القول بأن الزمرة هي مجموعة «يوجد فيها...» يكافؤ القول بأن الزمرة هي مجموعة.

في الواقع، عند دراسة الزمر، فإننا لانهتم بإمكانية إيجاد قانون تشكيل داخلي على مجموعة معينة G ، بل إننا نفترض أن ذلك القانون معطى مسبقاً ونستعمله لبرهان النتائج التي تهمنا.

لقد إستخدمنا في التعريف السابق كتابة ضربية لقانون الزمرة، وهذا ما نفعله أغلب الأحيان (نشير إلى أننا قد نرمز للعنصر الحيادي بـ 1 عوضاً عن e ونسميه عنصر وحدة الزمرة)؛ وإذا كانت الزمرة تبديلية (أي إذا كان قانون الزمرة تبديلياً) فإننا نستعمل بعض الأحيان الكتابة الجمعية $(x, y) \mapsto x + y$ وعندئذٍ فإن الشروط تصبح :

(a′) $(x + y) + z = x + (y + z)$ مهما كان x و y و z في G .

(b′) يوجد عنصر 0 في G بحيث $x + 0 = x$ مهما كان x في G .

(c′) من أجل كل x في G فإنه يوجد عنصر $-x$ من G بحيث $x + (-x) = 0$ ونضيف الشرط :

(d′) من أجل كل x وَ y في G فإن $x + y = y + x$.

مثال 1 – إن مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$ وقانون التشكيل $(x, y) \mapsto x + y$ ، يعرّفان زمرة تبديلية تسمى الزمرة الجمعية للأعداد الصحيحة، وإذا عوضنا $\mathbf{Z}$ بـ $\mathbf{Q}$ (أو بـ $\mathbf{R}$) فإننا نحصل على الزمرة الجمعية للأعداد الناطقة (أو الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية).

مثال 2 – إن الزوج المكوّن من $\mathbf{Q}^*$، مجموعة الأعداد الناطقة غير المعدومة، وقانون التشكيل $(x, y) \mapsto xy$، هذا الزوج يعرّف زمرة (عنصرها الحيادي هو العدد 1) تسمى : الزمرة الضربية للأعداد الناطقة غير المعدومة. وبنفس الطريقة نعرّف الزمرة الضربية الحقيقية غير المعدومة (الزمرة $\mathbf{R}^*$).

مثال 3 – نرمز بـ $\mathbf{Q}_+^*$ للزمرة التي نحصل عليها باعتبار مجموعة الأعداد الناطقة الموجبة والغير معدومة، والقانون هو الضرب العادي؛ كما نرمز بِ $\mathbf{R}_+^*$ للزمرة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة والغير معدومة. نشير أيضاً إلى أن الزوج المكون من I، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $0 < x \leq 1$ وقانون التشكيل $(x, y) \mapsto xy$ ليست زمرة لأن الشرط (c) من تعريف الزمرة غير محقق.

مثال 4 – لتكن X مجموعة ؛ نذكّر (ف 2 رقم 8) أن تبديل X هو كل تقابل لِـ X في X . لتكن $\sigma(X)$ مجموعة تباديل X .

إذا كان f و g تبديلين لِـ X فإن $f \circ g$ أيضاً تبديل لِـ X (ف 2- نظرية 6) ومنه فإن الدستور : $(f, g) \mapsto f \circ g$ يعرّف قانون تشكيل داخلي في $\sigma(X)$ وهذا القانون تجميعي (ف 2 نظرية 2) ويقبل عنصراً حيادياً وهو التطبيق المطابق y_x (يسمى عادة التبديل الواحدي) . كما أنه إذا كان f في $\sigma(X)$ فإن f^{-1} أيضاً (ف 2 نظرية 5) ومن الواضح أن f^{-1} هو نظير f بالنسبة للقانون المعرّف .

وهكذا فإن الزوج المكوّن من $\sigma(X)$ والقانون $(f, g) \mapsto f \circ g$ يعرّف زمرة تسمى زمرة تباديل المجموعة X .

إن الدراسة التي قام بها الباحث الفرنسي غالوا لهذه الزمر لما تكون X منتهية ، قد أدّت إلى التعريف المجرد لمفهوم الزمرة.

لننظر مثلاً إلى $\sigma(X)$ حيث $X = \{1, 2, 3\}$ ؛ في هذه الحالة تتألف $\sigma(X)$ من ست عناصر :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ويكون قانون التشكيل معرّفاً بالجدول التالي :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_3	s_1	s_5	s_6	s_4
s_3	s_3	s_1	s_2	s_6	s_4	s_5
s_4	s_4	s_6	s_5	s_1	s_3	s_2
s_5	s_5	s_4	s_6	s_2	s_1	s_3
s_6	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1

وتكون عملية الحساب معرّفة كما يلي : إذا أردنا الحصول على xy فإننا نأخذ سطر x وعمود y ويكون xy في تقاطعهما، مثلاً :

$$s_2 \cdot s_4 = s_5$$

نرى من هذا المثال أنه توجد زمر منتهية، أي ذات عدد منته من العناصر ؛ ومن الواضح أنه إذا كانت X مجموعة منتهية فإن $\sigma(X)$ تكون أيضاً منتهية .

إذا كانت $X = \{1, 2, ..., n\}$ (وقد رأينا في ما سبق الحالة $n = 3$) فنضع $\sigma_n = \sigma(X)$. ونسميها **الزمرة التناظرية ذات n متحولاً**، وقد رأينا في 5 (نتيجة النظرية 9) أن عدد عناصر σ_n هوَ العدد

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... n$$

وبما أن $6! = 720$ ؛ $7! = 5040$ ، $8! = 40320$ ؛ $9! = 362880$ فإنه من مجال الخيال محاولة استنتاج خواص σ_n اعتماداً على جداول ضربها .

مثال 5 - إذا اعتبرنا G مجموعة الأشعة المنطلقة من النقطة 0 في الفراغ العادي، وقانون التشكيل $(x, y) \mapsto x + y$ والمعرّف هندسياً بدستور متوازي الضلعين، فإننا نحصل على زمرة تبديلية (قانونها الجمع) .

2. الجداء المباشر للزمر

لتكن G_1 ، G_2 ، ... ، G_n زمراً ضربية ونضع (ف 2 رقم 2)

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$$

ونعرّف قانوناً على G بالدستور التالي :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n)$$

ان الزوج المكون من G ومن هذا القانون هو زمرة : لإثبات الشرط (a) نعتبر ثلاث عناصر من G .

$$x = (x_1, ..., x_n) \qquad y = (y_1, ..., y_n) \qquad z = (z_1, ..., z_n)$$

لدينا بالتعريف :

$$xy = (x_1 y_1, ..., x_n y_n) \qquad yz = (y_1 z_1, ..., y_n z_n)$$

ومنه

$$(xy)z = \big((x_1 y_1) z_1, ..., (x_n y_n) z_n\big)$$
$$x(yz) = \big(x_1(y_1 z_1), ..., x_n(y_n z_n)\big)$$

بحيث تجميعية G تنتج عن تجميعية الزمر G_1 ، G_2 ، ... ، G_n .

لإثبات وجود عنصر حيادي في G نعتبر العنصر

$$e = (e_1, e_2, ..., e_n)$$

حيث e_i هو عنصر حيادي G_i $(1 \leq i \leq n)$ ، وبحساب بسيط نرى أن e عنصر حيادي في G. أخيراً ، إذا كان :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

عنصراً من G فإنه يقبل نظيراً x^{-1} معرّفاً بالدستور :

$$x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, ..., x_n^{-1})$$

ونرى أن G مزودة بالقانون المذكور لها بنية زمرة تسمى **الجداء المباشر للزمر** G_1 ، G_2 ، ... G_n ؛

إذا كانت الزمر G_i $(1 \leq i \leq n)$ تبديلية وقوانينها جمعية فنستعمل الجمع بالنسبة لقانون جدائها المباشر (وهذا ممكن لأنه إذا كانت G_1, G_2 ، ... ، G_n ، تبديلية فإن G أيضاً تكون تبديلية) وفي هذه الحالة يكون القانون معرّفاً كما يلي :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

ويكون $(0, 0, ..., 0)$ عنصراً حيادياً حيث 0 هو عنصر حيادي كل الزمر G_i $1 \leq i \leq n$.

أخيراً إذا كانت لدينا زمرة G فمن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرّف G^n بالعلاقة :

$$G^n = \underbrace{G_1 \times \ldots \times Gn}_{n \text{ مرة}}$$

مثال 6 - نعرّف الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}^n$ كما يلي :

كل عنصر من $\mathbf{Z}^n$ هو متتالية $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ من الأعداد الصحيحة، ويكون قانون التشكيل.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

ونعرّف بطريقة مماثلة الزمرة الجمعية $\mathbf{Q}^n$، (حيث $\mathbf{Q}$ هي مجموعة الأعداد الناطقة)، والزمرة الجمعية $\mathbf{R}^n$ (حيث $\mathbf{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية).

إذا اخترنا في المستوى محوري مركبات Ox وَ Oy وإذا رافقنا كل (x, y) من $\mathbf{R}^2$ بالشعاع $\overrightarrow{OP}$ ذي مركبات x وَ y حسب المحورين المذكورين، فإننا نحصل على تقابل بين $\mathbf{R}^2$ ومجموعة أشعة المستوي المنطلقة من O، ونرى أن الجمع في $\mathbf{R}^2$ يقابل جمع الأشعة في المستوي، ولهذا فإن الجمع في $\mathbf{R}^2$ هو تعبير جبري لمفهوم الجمع الهندسي لشعاعين من المستوي.

3. الزمر الجزئية لزمرة

نقول عن جزء H من زمرة G انه زمرة جزئية من G إذا كان لدينا :

(i) H غير خالية

(ii) إذا كان x وَ y عنصرين من H فإن $xy^{-1} \in H$.

إن كل زمرة تقبل على الأقل زمرتين جزئيتين : G نفسها والمجموعة $\{e\}$ المكوّنة من عنصر حيادي G .

ومن الواضح أن $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ زمرتان جزئيتان من الزمرة الجمعية $\mathbf{R}$ (مثال 1).

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ؛ بما أن H غير خالية فإنه يوجد على الأقل عنصر a في H ، ومن العلاقتين $a \in H$ وَ $a' \in H$ نستنتج $e = a \cdot a^{-1} \in H$ ومنه فإن الزمرة الجزئية تحتوي حتماً عنصر حيادي الزمرة G . ومن جهة أخرى إذا احتوت H عنصراً x فنظراً لكون e ينتمي إلى H نرى أن :

$$x^{-1} = e x^{-1} \in H$$

ومنه فإن $x \in H$ يستلزم $x^{-1} \in H$. ليكن أخيراً x و y عنصرين من H ، حسب ما سبق يكون لدينا أيضاً x^{-1} وَ y^{-1} في H ومنه :

$$xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$$

أي أن x وَ y في H يستلزمان $xy \in H$

بطريقة عكسية نعتبر الآن مجموعة جزئية H من الزمرة G بحيث تتحقق الشروط التالية :

(a) x وَ y في H يستلزمان xy في H ،

(b) H يحتوي e ، عنصر حيادي G ،

(c) إذا كان x في H فإن x^{-1} أيضاً في H ،

عندئذٍ تكون H زمرة جزئية من G . بالفعل، H غير خالية لأن $e \in H$ حسب (b)، ليكن x وَ y في H ، حسب (c) فإن $y^{-1} \in H$ ومنه فإن $xy^{-1} \in H$ حسب (a).

إن الخواص (a)، (b)، (c) تميز الزمرة الجزئية، وقد نستعملها في التطبيقات عوضاً عن التعريف المعطى في بداية الفقرة.

ونلاحظ أيضاً أن (a) و (b) لايكفيان لتعريف الزمرة الجزئية إذ أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbf{N}$ تحقق الشرطين المذكورين لكنها ليست زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$.

لتكن H زمرة جزئية من G ؛ حسب الشرط (a)، فإن اقتصار قانون G على H يجعل هذه الأخيرة زمرة: بالفعل، بما أن القانون تجميعي في G فهو أيضاً تجميعي في H، ونظراً لكون عنصر حيادي G ينتمي إلى H فهو أيضاً عنصر حيادي قانون H، أخيراً إذا كان x ينتمي إلى H وإذا كان x^{-1} نظيره في G فإن x^{-1} هو أيضاً نظير x في H بالنسبة لقانون هذا الأخير.

في كل ما يتبع، إذا اعتبرنا زمرة جزئية H من زمرة G فإننا ننظر إليها دائماً كزمرة مزودة باقتصار قانون G عليها.

مثال 7 - لتكن مجموعة X، نسمي **زمرة من تحويلات** X كل زمرة جزئية من $\sigma(X)$، زمرة تباديل X. إن كل زمرة من تحويلات X هي مجموعة G مؤلفة من تطبيقات لِـX في X حيث تتحقق الشروط التالية: كل عنصر من G هو تقابل لِـX في X، G تحتوي التطبيق المطابق j_X وإذا كان s و t في G فإن st^{-1} ينتمي أيضاً إلى G، ونرى أن G زمرة إذا زودناها بالقانون:

$$(s, t) \mapsto s \circ t$$

إن الهندسة الابتدائية تعطي أمثلة متنوعة لزمر من التحويلات: زمرة الانسحابات في المستقيم أو في المستوي أو في الفضاء، زمرة الدورانات حول نقطة من المستوي أو في الفضاء، زمرة الانتقالات في المستوي أو في الفضاء؛ الخ....

مثال 8 - لتكن $\mathbf{Z}$ زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع. كل زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ هي مجموعة أعداد صحيحة I تحقق الشرطين: $0 \in I$ ومن أجل كل x وَ y في I فإن $x - y \in I$. من أجل كل عدد صحيح n نرمز بِـ$n\mathbf{Z}$ لمجموعة مضاعفات n (أي مجموعة الأعداد nx من أجل كل x في $\mathbf{Z}$).

من الواضح أن $n\mathbf{Z}$ هي زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$، لنثبت أن كل زمرة جزئية I من $\mathbf{Z}$ تحقق العلاقة $I = n\mathbf{Z}$ من أجل عدد طبيعي وحيد n؛ نلاحظ أولاً أنه إذا كان $I = \{0\}$ فإن العلاقة بديهية. نفترض إذن أن $I \neq \{0\}$ وليكن n أصغر عدد موجب تماماً في I (بما أن $I \neq \{0\}$ فإن I تحتوي أعداداً موجبة لأنه من أجل x سالب في I فإن $-x$ يكون أيضاً في I) ونذكّر أنه حسب

ف 5 ملاحظة 2، كل جزء من $\mathbf{N}$ غير خال يقبل أصغر عنصر. لنبرهن أن $I = n\mathbf{Z}$: أن I يحتوي $2n$ لأنه يحتوي n و n وبالتالي يحتوي nx مهما كان x في $\mathbf{N}$ و $x > 0$.

كما أن $0 \in I$ وَ $n \cdot 0 = 0$، وإذا كان x سالباً فإن $-x$ يكون موجباً، وإذا وضعنا $-n(x) = n(-x)$، نرى أن I تحتوي $nx = (-n)(-x)$ ومنه $n\mathbf{Z} \subseteq I$. بقي أن نثبت الاحتواء المعاكس. من أجل ذلك نعتبر عنصراً كيفياً x من I؛ لتكن القسمة الإقليدية:

$$x = nq + \pi \ ; 0 \leq \pi < n$$

بما أن I تحتوي n فإن $nq \in I$، وبما أن x ينتمي إلى I فإن $\pi = x - nq$ ينتمي أيضاً إلى I، إذا كان $\pi \neq 0$ فإن n لايكون أصغر عنصر موجب في I إذن $\pi = 0$ وهذا يعني أن $I \subseteq n\mathbf{Z}$. بقي أن نثبت أن n وحيد؛ نفترض أنه يوجد p و q في $\mathbf{N}$ بحيث $p\mathbf{Z} = q\mathbf{Z}$، ونستنتج أن p يقسم q وَ q يقسم p ومنه $p = q$.

إن النتيجة السابقة التي تنص على أن زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ هي من الشكل $n\mathbf{Z}$، تلعب دوراً هاماً في نظريات الحساب وغيرها، كما أنها قد تعوض بصورة مفيدة البراهين المعتمدة على «القسمة الإقليدية» في المجموعة $\mathbf{Z}$.

لنرى كمثال كيف أن النتيجة المذكورة تؤدي إلى أهم خواص القاسم المشترك الأعظم: لتكن الأعداد الصحيحة الغير معدومة $x_1, x_2, \dots x_n$ ولتكن I مجموعة عناصر $\mathbf{Z}$ التي تكتب على الشكل:

$$x = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$$

حيث $u_1, u_2, \dots, u_n$ عناصر من $\mathbf{Z}$. من الواضح أن I زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ وبالتالي يوجد عدد طبيعي d بحيث $I = d\mathbf{Z}$؛ أي أن كل عنصر من I هو من مضاعفات d أي أن d هو القاسم المشترك الأعظم للأعداد x_1، x_2 ...،

ملاحظة 2 - نسمي زمرة دوارة (**أو دورية**) كل زمرة G يوجد بها عنصراً x بحيث كل عنصر من G يكون احدى قوى x ونقول عندئذٍ ان x **يولد** G . ان $\mathbf{Z}$ هي زمرة دوارة وتقبل مولدين، هما 1 وَ 1 - . ومن الواضح أنه توجد زمرة دوارة منتهية (يكفي أن نعتبر الزمر الجزئية المولدة عن أحد عناصر زمرة منتهية) وسنرى كيف يمكن تعريف بنياتها تماماً .

4. تقاطع الزمر الجزئية؛ المولدات

لدينا النتيجة التالية :

نظرية 1 - لتكن $(H_i)_{i\in J}$ جماعة من الزمر الجزئية في زمرة G . ان تقاطع المجموعات H_i هي أيضاً زمرة جزئية من G ؛ ولكي تكون $\bigcup_{i\in J} H_i$ زمرة جزئية من G فإنه يكفي أن يتحقق الشرط التالي : مهما كان $i\in J$ وَ $j\in J$ فإنه يوجد $k\in J$ بحيث $H_k \supseteq H_i \cup H_j$.

ليكن :

$$M = \bigcap_{i\in J} H_i$$

M غير خالية لأنها تحتوي عنصر حيادي G ؛ من أجل كل x و y في M فإنهما ينتميان أيضاً إلى H_i مهما كان $i\in J$ وبالتالي فإن $xy^{-1}\in H_i$ مهما كان i ومنه فإن $xy^{-1}\in M$ ، وبذلك تكون M زمرة جزئية من G .

لتكن الآن :

$$U = \bigcup_{i\in J} H_i$$

من الواضح أن U غير خالية؛ لتكن x وَ y في U ، يوجد i وَ j في J بحيث $x\in H_i$ و $y\in H_j$ ، وحسب شروط النظرية فإنه يوجد k بحيث $H_k \supseteq H_i \cup H_j$ ؛ ومنه فإن $xy^{-1}\in H_k$ وبالتالي $xy^{-1}\in U$ أي أن U زمرة جزئية من G .

ليكن B جزء من زمرة G ؛ توجد طبعاً زمراً جزئية من G تحتوي B (مثلاً G نفسها) . إن تقاطع هذه الزمرة الجزئية هي أيضاً زمرة جزئية تحتوي B وتسمى الزمرة الجزئية المولدة عن B .

نفترض مثلاً أن B تتألف من عنصر وحيد x ؛ كل زمرة جزئية تحتوي x تحتوي أيضاً بالضرورة كل قوى x (المعرّفة في المثال 9) ، وبما أن مجموعة هذه القوى تؤلف زمرة جزئية تحتوي x نرى أنها أصغر جزئية تحتوي : $B = \{x\}$. وبطريقة تشابه المثال 9 ، يمكن الحصول على الزمرة الجزئية المولدة عن B لما تكون هذه الأخيرة مجموعة جزئية كيفية من G .

نظرية 2 - ليكن B جزء من زمرة G وليكن $x \in G$ ؛ x ينتمي إلى الزمرة الجزئية المولدة عن B إذا وإذا فقط وجد عدد طبيعي p وعناصر x_1 ، x_2 ، ... x_p من G بحيث

(i) $x = x_1 \cdot x_2, \ldots, x_p$

(ii) مهما كان $1 \leq i \leq p$ فإن $x_i \in B$ أو $x_i^{-1} \in B$.

ملاحظة 3 - من أجل $p = 0$ فإن (i) يعني أن $x = e$ حيث e هو عنصر حيادي G . وبصورة عامة نعطي معنى لجداء خال من العناصر بالقول أن الجداء المذكور يساوي عنصر حيادي الزمرة ؛ وهذا الإصطلاح ضروري في بعض النصوص .

لنبرهن الآن النظرية 2 ؛ ونعتبر من أجل ذلك ، H ، مجموعة عناصر G التي تحقق شرط النظرية ؛ المطلوب هو إثبات :

H زمرة جزئية من G ،

H تحتوي B ،

H محتواة في كل زمرة جزئية تحتوي B .

فالنقطة الثانية محققة لأن كل عنصر $x \in B$ يحقق (i) وَ (ii) إذا وضعنا $x = x_1$ وَ $p = 1$ ، كما أنه إذا كانت زمرة جزئية تحتوي B فإنها تحتوي العناصر x_i المعرّفة في (ii) وبالتالي تحتوي أيضاً العنصر x المعرّف في (i) .

بقي أن نثبت أن H زمرة جزئية من G ، ونلاحظ أولاً أن $e \in H$ حسب الملاحظة 3 .

من أجل x وَ y في H يكون لدينا :

$$x = x_1 \cdot x_2 \dots x_p \qquad y = y_1 \cdot y_2 \dots y_q$$

حيث $x_i \in B$ أو $x_i^{-1} \in B$ مهما كان $1 \leq i \leq p$ ،

و $y_i \in B$ أو $y_j^{-1} \in B$ مهما كان $1 \leq j \leq q$

ومنها ، (اعتماداً على ف 6 نظرية 3) :

$$xy^{-1} = (x_1x_2 \dots x_p)(y_1y_2 \dots y_q)^{-1} = x_1x_2 \dots x_p y_q^{-1} \dots y_1^{-1}$$

وهذا يعني أن $xy^{-1} \in H$ وبالتالي فإن H زمرة جزئية ، وهذا يتم البرهان .

إذا كانت الزمرة G نفسها هي الزمرة الجزئية المولدة عن جزء B منها فنقول أن B تولد G أو أنها **مجموعة مولدات لـ** G . وإذا كانت G تقبل مجموعة مولدات منتهية (أي إذا كان B جزء منته من G ويولد G) فنقول عن G أنها مولدة بصورة منتهية أو أنها **زمرة من صنف منته** ، ومن الواضح أن كل زمرة دوارة هي من صنف منته .

لتكن G زمرة تبديلية من صنف منته ، و $B = \{a_n \dots a_2 ، a_1\}$ مجموعة منتهية ومولدة لِـ G . كل $x \in G$ يكتب حسب النظرية 2 على الشكل :

$$x = x_1 \cdot x_2 \dots x_p$$

حيث x_i أو x_i^{-1} ينتمي إلى B أي أن كل x_i يساوي أحد العناصر a_j أو a_j^{-1} ، وبما أن G تبديلية فإنه يمكن تجميع المركبات التي تساوي a_j أو a_j^{-1} من أجل كل j معين ؛ وهذا يجعل x تكتب على الشكل :

$$x = a_1^{\pi_1} a_2^{\pi_2} \dots a_n^{\pi_n}$$

حيث π_1 ، π_2 ، ... ، π_n أعداد صحيحة ؛ ونرى من ناحية عكسية أن G تكون من صنف منته إذا كان كل $x \in G$ يقبل كتابة من الشكل المذكور .

مثال 10 – ان الزمرة الجمعية Z^n هي من صنف منته وتقبل مجموعة المولدات التالية :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \qquad e_2 = (0, 1, 0, ... 0) ... e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

بالفعل، من أجل كل أعداد صحيحة π_1، π_2، ... π_n يكون لدينا :

$$\pi_1 e_1 = (\pi_1, 0, 0, 0)$$
$$\vdots$$
$$\pi_n e_n = (0, 0, ..., 0, \pi_n)،$$

ومنها : $(\pi_1, \pi_2, ... \pi_n) = \pi_1 e_1 + \pi_2 e_2 + ... + \pi_n e_n$

وهذا يثبت أن كل عنصر من $\mathbf{Z}^n$ هو جداء (أي مجموع في هذه الحالة) قوى (أي مضاعفات) العناصر e_1، e_2، ... e_n.

وعلى عكس ذلك فإن الزمرة الجمعية للأعداد الناطقة $\mathbf{Q}$ ليست من صنف منته، لنفترض أنها مولدة عن جماعة منتهية من الأعداد الناطقة :

$$a_1 = \frac{p_1}{q_1} \text{ ، } ... \quad a_n = \frac{p_n}{q_n} \text{ ،}$$

ويعني ذلك أن كل عدد ناطق x يكتب على الشكل $x = \pi_1 a_1 + ... + \pi_n a_n$ من أجل أعداد صحيحة π_1، π_2، ... π_n،وعندئذٍ يكتب x على شكل كسر يساوي مخرجه العدد $q_1 q_2 ... q_n$.

وهذا مهما كان x في $\mathbf{Q}$، أي أنه يمكن إيجاد مخرج مشترك وحيد لكل الأعداد الناطقة، وهذا مستحيل(*).

5. التباديل والانقالات (أو المناقلات)

لتكن σ_n زمرة تباديل المجموعة :

$$I_n = \{1, 2, ..., n\}$$

نقول عن تبديل $t \in \sigma_n$ انه **انقال** إذا وجد عدد طبيعي i يحقق

(*) ننصح القارئ إثبات هذا النص

$1 \le i \le n-1$. بحيث $t(i) = i+1$ ، $t(i+1) = i$ و $t(k) = k$ إذا كان $k \neq i, i+1$.

نظرية 3 - الزمرة σ_n مولدة عن الانقالات التي تحتويها.

سنثبت في الواقع أن كل تبديل $s \in \sigma_n$ هو جداء انقالات وذلك بالتدريج بالنسبة لِـ n . (الحالة $n = 1$ بديهية لأنه عندئذٍ ينحصر σ_n على عنصره الحيادي) .

ليكن إذن التبديل $s \in \sigma_n$ ونضع $s(n) = i$ ؛ لنرمز بِـ t_j للانقال الذي يبدل j مع $j+1$ ومن الواضح أن:

$$u = t_{n-1} \circ \dots \circ t_i \circ s$$

يحقق $u(n) = n$ وانه لدينا:

$$s = t_i^{-1} \circ \dots \circ t_{n-1}^{-1} \circ u = t_i \circ \dots \circ t_{n-1} \circ u$$

حسب العلاقة $t = t^{-1}$ مهما كان الانقال t.

ومنه حتى نثبت أن s هو جداء انقالات يكفي أن نثبت ذلك بالنسبة لِـ u (أي لتبديل يحقق $u(n) = n$) .

لكن u في هذه الحالة تبدل العناصر $1, 2, \dots, n-1$ من I_n أو بعبارة أخرى حصر u على I_{n-1} يكون تبديلاً u' من σ_{n-1} ، واعتماد على افتراض التدريج فإن:

$$u' = v_1 \circ \dots \circ v_q$$

حيث $v_1, v_2, \dots v_q$ انقالات في الزمرة σ_{n-1} ، لنعرّف عندئذٍ الانقالات $w_1, w_2, \dots, w_q$ في σ_n كما يلي:

$$w_j(x) = \begin{cases} v_j(x) & \text{إذا كان } x \in I_{n-1} \\ n & \text{إذا كان } x = n \text{ ؛} \end{cases}$$

بما أن $u = u'$ في I_{n-1} وبما أن $u(n) = n$ فمن الواضح أن:

$$u = w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_q$$

ونظراً لـكون $v_1, v_2, \dots v_q$ انقالات لِـ I_{n-1} فإن كل w_j هو انقال لِـ I_n . ومنه، في الزمرة σ_n، يكون التبديل u جداء أنقالات وهذا يتم البرهان .

6. الصفوف حسب زمرة جزئية

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية منها؛ إن العلاقة :

$$R\{x, y\} : xy^{-1} \in H$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة G بمفهوم ف 4 رقم 1 . أولاً من الواضح أن $R\{x, x\}$ محققة دائماً لأنها تعني أن H يحتوي عنصر حيادي الزمرة G ؛ لنثبت أن $R\{x, y\}$ تستلزم $R\{y, x\}$: حسب تعريف الزمرة الجزئية نعلم أن :

$xy^{-1} \in H$ تستلزم $(xy^{-1})^{-1} \in H$ أي $yx^{-1} \in H$.

أخيراً إذا كان لدينا $R\{x, y\}$ و $R(y, z\}$ فمعنى هذا أن $xy^{-1} \in H$ وَ $yz^{-1} \in H$ ؛ وبما أن H زمرة جزئية فإن

$(xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$ أي $xz^{-1} \in H$ وهذا يعني $R\{x, z\}$.

وبالتالي تكون بالفعل العلاقة السابقة علاقة تكافؤ على المجموعة G . لنعرّف الآن صفوف التكافؤ F_x وفق هذه العلاقة (ف 4 رقم 2) .

من أجل $x \in G$ ، فإن المجموعة F_x هي بالتعريف مجموعة العناصر $y \in G$ بحيث $R\{x, y\}$ تكون محققة؛ أو بعبارة أخرى مجموعة العناصر $y \in G$ التي تحقق $xy^{-1} \in H$ أي $yx^{-1} \in H$.

إذا وضعنا $z = yx^{-1}$ فإننا نحصل على أن $y = zx$ وهكذا فإن $R\{x, y\}$ تكافؤ $z \in H$. من ذلك نرى أن F_x هي مجموعة عناصر G التي تكتب على الشكل zx من أجل $z \in H$ لذلك فإننا نضع :

$$F_x = Hx$$

ونسمي Hx **صف من اليسار وفق** H أو حسب H (نعرّف بطريقة مماثلة الصفوف من اليمين وفق H : وهي أجزاء G من الشكل xH ، حيث xH هي مجموعة العناصر من الشكل xz حيث $z \in H$) .

إن مجموعة الصفوف xH (و Hx) وفق H أي خارج قسمة المجموعة G على علاقة التكافؤ $x^{-1}y \in H$ (و $yx^{-1} \in H$) تكتب على الشكل G/H (و G/H) .

مثال 11 - لنأخذ G الزمرة الجمعية للأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$ و H الزمرة الجزئية $p\mathbf{Z}$ المكونة من مضاعفات عدد صحيح p معين .

إن العلاقة $R\{(x, y\}$ تكتب (الزمرة في هذه الحالة جمعية) على الصورة

$$x - y \in p\mathbf{Z} \quad \text{أي} \quad x \equiv y(p)$$

ونحصل على المثال 4 من ف 4 ؛ وتكون صفوف التكافؤ وفق $p\mathbf{Z}$ في هذه الحالة هي صفوف الترديدات حسب p المعرّفة في ف 4 مثال 9 .

نشير هنا إلى أننا قد عرّفنا في ف 4 عملية «جمع» على المجموعة $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ بالدستور .

$$\theta(x, y) = \theta(x) + \theta(y)$$

مهما كان x و y في $\mathbf{Z}$ (حيث θ هي التطبيق الغامر القانوني لِـ $\mathbf{Z}$ في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) . ويمكن لنا بسهولة (انظر إلى ف 8 رقم 3) أن نرى أن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ مزودة بعملية الجمع هذه لها بنية زمرة (الزمرة الجمعية للأعداد بترديد p) . نشير إلى أن التمرين 16 من هذه الفقرة يعطي تعميماً لهذه البنية .

نلاحظ أنه من أجل كل صف xH وفق H فإنه يوجد تقابل لِـ H في xH ، ألا وهو التطبيق $z \mapsto xz$ (هذا التطبيق غامر حسب تعريف الصفوف ، وهو متباين لأن كل $x \in G$ يقبل نظير وبالتالي يمكن تطبيق النظرية 4 ف 6) . في الحالة الخاصة التي تكون فيها G زمرة منتهية ، بحيث H تكون أيضاً منتهية ، نرى أن H و xH لها نفس عدد العناصر . بما أن الصفوف xH تشكل تجزئة لِـ G فإن عدد عناصر G يساوي جداء عدد عناصر H مع عدد الصفوف المختلفة xH (ف 5 نظرية 7) . إذن .

نظرية 4 – لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G . لدينا :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(G/H) \cdot \text{Card } H$$

ملاحظة 4 – إن $\text{Card}(G)$ ، عدد عناصر الزمرة المنتهية G ، يسمى عادة مرتبة G (مثلاً الزمرة المنتهية التي مرتبتها 5 هي زمرة مكونة من 5 عناصر) . ومن جهة أخرى فإن $\text{Card}(G/H)$ الذي يرمز له بعض الأحيان بـ $G:H$ يسمى دليل H في G ، ويمكن أن نبرهن بسهولة أنه يساوي أيضاً عدد الصفوف المختلفة Hx في G .

إن النظرية 4 تشير بصورة خاصة إلى أن مرتبة H تقسم مرتبة G ونعطي الآن تطبيقاً هاماً لهذه النتيجة .

نظرية 5 – لتكن G زمرة منتهية ذات مرتبة n ؛ إذن من أجل كل x في G فإن $x^n = e$.

لتكن H الزمرة الجزئية من G المولدة عن x وليكن $\pi = \text{Card}(H)$ ، بما أن π يقسم n يكفي أن نبرهن أن $x^\pi = e$ ؛ أو بعبارة أخرى يكفي أن نبرهن النظرية 5 في الحالة التي تكون فيها G مولدة عن x ، وهذا ما نفترضه فيما يلي .

ليكن التطبيق $f: \mathbf{Z} \to G$ المعرّف بـ $f(q) = x^q$ ، وهو غامر حسب ما افترضناه : وباستخدام قواعد حساب القوى (مثال 9) نرى أن :

$$f(0) = e; \ f(q' - q'') = f(q')\, f(q'')^{-1}$$

ونستنتج من ذلك أن العناصر $q \in \mathbf{Z}$. بحيث $f(q) = e$ تشكل زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ تساوي إذن $s\,\mathbf{Z}$ من أجل عدد طبيعي معين s .

وبالإضافة إلى ذلك فإن العلاقة $f(q') = f(q'')$ ،التي تكافؤ :

$$f(q') \cdot f(q'')^{-1} = e$$

يمكن كتابتها أيضاً على الصورة $f(q' - q'') = e$ وتكافؤ إذن $q' - q'' \in s\,\mathbf{Z}$ أي $q' \equiv q'' \ (s)$.

وبما أن f غامر فإن عدد عناصر G يساوي عدد الصفوف المختلفة وفق sZ ومنه فإن $\text{Card } G = s$ ؛ ونظراً لأن $x^s = e$ فإننا نحصل على برهان النظرية .

7. عدد تباديل n عنصر

لقد برهنا في ف 5 (نتيجة النظرية 9) أنه إذا كانت X مجموعة منتهية ومكوّنة من n عنصر فإن مرتبة $\sigma(X)$، زمرة تباديل X ، تساوي $n! = 1 .2 ... n$.

سنعطي هنا برهاناً آخر لهذه النتيجة معتمدين خصوصاً على بنية الزمرة للمجموعة $\sigma(X)$.

إن النتيجةالمعلنة بديهية لما يكون $n = 1$ لنفترض أن $n > 1$ وأن النتيجة محققة من أجل العدد $n - 1$.

ليكن $a \in X$ عنصراً لا نغيره فيما يلي ولتكن المجموعةً

$$Y = X - \{a\}$$

بما أن Y مجموعة مكونة من $n - 1$ فإن افتراض التدريج يطبق عليها .

من ناحية ثانية يمكن أن نجعل $\sigma(Y)$ زمرة جزئية من $\sigma(X)$ وذلك بمقابلة كل تبديل s لِـY بالتبديل $\bar{s}$ لِـX المعرّف بِـ :

$$\bar{s}(x) = \begin{cases} s(x) & x \in Y \text{ إذا كان } \\ a & x = a \text{ إذا كان } \end{cases}$$

وهذا يجعل $\sigma(Y)$ متطابقة مع الزمرة الجزئية من $\sigma(X)$ المكونة من تباديل X التي تقبل a كنقطة ثابتة .

حسب افتراض التدريج لدينا : $\text{Card}(\sigma(Y)) = (n-1)!$ ، ولنبرهن أن $\text{Card}(\sigma(X)) = n!$ فإنه يكفي أن نثبت انه في الزمرة $\sigma(X)$ يوجد بالتحديد n صفاً مختلفاً وفق $\sigma(Y)$.

للحصول على ذلك نعرّف التطبيق $f: \sigma(X) \to X$ بالعلاقة $f(s) = s(a)$ مهما كان s في $\sigma(X)$.

ليكن s و t تبديلين لِـ X؛ إن العلاقة $f(s) = f(t)$ التي تعني: $s(a) = t(a)$، أي $a = s^{-1} t(a)$، تعني أن $s^{-1} t \in \sigma(Y)$ أي أن s و t ينتميان إلى نفس الصف على اليمين وفق $\sigma(Y)$.

واعتماداً على النظرية 2 ف 4 نرى أن عدد الصفوف وفق $\sigma(Y)$ يساوي عدد عناصر $f(\sigma(X))$ أي عدد العناصر $x \in X$ التي يوجد من أجلها تبديل s للمجموعة X بحيث $x = s(a)$. لكن من الواضح أن كل x في X يكتب على الشكل $x = s(a)$ من أجل تبديل مناسب s؛ وبالتالي فعدد الصفوف وفق $\sigma(Y)$ في $\sigma(X)$ يساوي n وهذا يتم البرهان.

8. تماثل الزمر

لتكن G و H زمرتين؛ نسمي **تماثل لِـ G في H** كل تطبيق $f: G \to H$ بحيث:

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ من أجل كل x و y في G.

ونرى أنه إذا أخذنا $y = e$ في العلاقة السابقة فإننا نحصل على:

$$f(x) = f(x) \cdot f(e)$$

وهذا يؤدي إلى:

$$f(e) = e$$

أما إذا وضعنا $y = x^{-1}$ فإن العلاقة السابقة تعطي:

$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ من أجل كل x في G.

ملاحظة 5 – في التعريف السابق نحن افترضنا أن قانون التشكيل في G وفي H هو الضرب؛ بحيث ينبغي أن نغيّر التعريف إذا كان أحدهما أو كلاهما

مزودا بقانون الجمع ؛ فإذا كان ، على سبيل المثال ، G ضربياً و H جمعياً فإن التعريف يصبح :

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ من أجل كل x و y في G .

مثال 12 - نفترض أن G هي الزمرة الجمعية للأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$ وأن H زمرة ضربية . من أجل كل $a \in H$ نعرّف تطبيقاً $f: \mathbf{Z} \to H$ بالعلاقة

$f(n) = a^n$ ، من أجل كل عدد n في $\mathbf{Z}$.

وينتج عن دساتير المثال 9 انه تماثل . وفي الحقيقة كل تماثل لِـ $\mathbf{Z}$ في H يكون معرّفاً بالطريقة المذكورة بالفعل ، إذا كان f تماثلاً لِـ $\mathbf{Z}$ في H وإذا وضعنا

$$f(1) = a$$

فإننا نرى أن :

$$f(2) = f\ (1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$$
$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3$$

وإذا كان n موجباً :

$$f(n) = a^n$$

أما إذا كان n سالباً :

$$f(n) = f(-n)^{-1} = (a^{-n})^{-1} = a^n$$

وبالتالي تكون العلاقة $f(n) = a^n$ محققة مهما كان $n \in \mathbf{Z}$.

مثال 13 - من أجل كل عدد صحيح p فإن التطبيق القانوني لِـ $\mathbf{Z}$ في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ يكون تماثلاً .

مثال 14 - إن الدستور $\text{Log}(xy) = \text{Log}\,x + \text{Log}\,y$ يثبت أن التابع Log ، المعرّف في التحليل ، هو تماثل للزمرة الضربية $\mathbf{R}^*_+$ في الزمرة الجمعية $\mathbf{R}$.

نظرية 6 - ليكن $f: M \to N$ و $g: N \to P$ تماثلا زمر ؛ إن التطبيق المركب $g \circ f: M \to P$ هو أيضاً تماثل .

إذا كان التماثل $f: M \to N$ تقابلياً فإن التطبيق العكسي $f^{-1}: N \to M$ هو أيضاً تماثل.

لنثبت النص الأول من النظرية. يكفي أن نلاحظ أنه من أجل x و y في M يكون لدينا:

$$g \circ f(xy) = g[f(xy)] = g[f(x) \cdot f(y)] = g[f(x)] \cdot g[f(y)]$$

أما الجزء الثاني من النظرية فيعني أن:

$$f^{-1}(uv) = f^{-1}(u)\, f^{-1}(v)$$

حيث u و v في N؛ وبما أن f تقابل وبالتالي متباين فيكفي أن نثبت أن طرفي العلاقة السابقة لهما نفس الصورة وفق f. بعبارة أخرى يكفينا أن نبرهن أن:

$$f[f^{-1}(uv)] = f[f^{-1}(u)\, f^{-1}(v)]$$

لدينا أولاً $f[f^{-1}(uv)] = uv$ حسب تعريف f^{-1}، وبما أن f تماثل نرى أن الطرف الأيمن يساوي:

$$f[f^{-1}(u)] \cdot f[f^{-1}(v)] = u \cdot v$$

وهذا يتم البرهان.

لتكن الزمرتان G و H؛ نسمي **تشاكلاً لِـ G في H** كل تماثل تقابلي لِـ G في H ونقول عندئذٍ أن G و H في تشاكل أو **متشاكلان**.

مثال 15 – إذا اعتبرنا، كما هو الحال في المثال 14، التابع Log، فإننا نرى أن $\mathbf{R}_+^*$ و $\mathbf{R}$ متشاكلان.

إن العلاقة G و H متشاكلان،

هي علاقة تكافؤ: مهما كانت الزمرة G فإن التطبيق لِـ G في G هو تشاكل وبالتالي فالعلاقة إنعكاسية، ومن جهة أخرى إذا كان f تشاكلاً للزمرة G في الزمرة H فإن f^{-1} يكون تشاكلاً لِـ H في G، وأخيراً إذا كان f

تشاكلاً للزمرة G في الزمرة H و g تشاكلاً لِـ H في الزمرة K فإن $g \circ f$ يكون تشاكلاً لِـ G في K، حسب النظرية 6.

نسمي **تشاكلاً ذاتياً** للزمرة G كل تشاكل لِـ G في G.

مثال 16 - لتكن G زمرة ضربية. من أجل كل $a \in G$ فإن التطبيق f لِـ G في G المعرّف بالعلاقة:

$$f(x) = a\,x\,a^{-1}$$

يكون تشاكلاً ذاتياً للزمرة G. بالفعل، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)\,f(y) &= (a\,x\,a^{-1})(a\,y\,a^{-1}) = (ax)(a^{-1}a)(y\,a^{-1}) \\ &= (ax)\cdot e\cdot(ya^{-1}) = (ax)(y\,a^{-1}) = a(xy)a^{-1} \\ &= f(xy) \end{aligned}$$

وهذا يعني أن f تماثل، وبالإضافة إلى ذلك ومهما كان y في G، فإن المعادلة $y = a\,x\,a^{-1}$ تقبل حلاً وحيداً وهو $x = a^{-1}y\,a$، وهذا يثبت أن f تقابل.

إن التشاكلات الذاتية للزمرة G والتي نحصل عليها بالطريقة المذكورة في المثال السابق، تسمى: التشاكلات الذاتية الداخلية للزمرة G. ومن الواضح أن هذا المفهوم ليست له أية أهمية إذا كانت الزمرة G تبديلية.

مثال 17 - لتكن الزمرة الضربية $\mathbf{R}_+^*$؛ مهما كان العدد الحقيقي $\alpha \neq 0$ فإن التابع،

$$f(x) = x^{\alpha}$$

المعرّف في التحليل، هو تشاكل ذاتي للزمرة $\mathbf{R}_+^*$، والتشاكل الذاتي العكسي يكون:

$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

ملاحظة 6 - إننا لا نفرّق عملياً بين زمرتين متشاكلتين؛ أو بعبارة أدق، إذا كانت الزمرة G والزمرة H متشاكلتين فإنهما تتمتعان بنفس الخواص بالنسبة لنظرية الزمر؛ فإذا كانت G تبديلية تكون H أيضاً تبديلية، وإذا كانت G

مولدة عن n عنصراً فإن H تكون أيضاً مولدة عن n عنصراً ؛ أو بصورة عامة ، إذا وجد تشاكلاً لِـ G في H فإنه يمكن «ترجمة» كل علاقة بين عناصر G إلى علاقة مماثلة بين عناصر H وذلك بتطبيق f على عناصر G التي تحقق العلاقة المذكورة .

نشير إلى أن التابع Log ، وهو تشاكل للزمرة الضربية $\mathbf{R}_+^*$ في الزمرة الجمعية $\mathbf{R}$ ، قد اخترع لتحويل كل علاقة ضربية بين أعداد موجبة إلى علاقة جمعية بين أعداد لها إشارة كيفية .

9. نواة وصورة تماثل

نبدأ ببرهان النتيجة التالية .

نظرية 7 – إذا كان f تماثلاً للزمرة G في الزمرة H فإن صورة كل زمرة جزئية من G وفق f هي زمرة جزئية من H ، كما أن الصورة العكسية وفق f لكل زمرة جزئية من H هي زمرة جزئية من G .

لتكن G' زمرة جزئية من G ونضع $H' = f(G')$ ، إذا كان u و v في H' فإنه يوجد x' و y' في G' بحيث $u = f(x)$ و $v = f(y)$.

إذاً :
$$uv^{-1} = f(x) \cdot f(y)^{-1} = f(x)\, f(y^{-1}) = f(xy^{-1})$$

وبما أن $xy^{-1} \in G'$ فإن $uv^{-1} \in H'$ ، وهذا يثبت الجزء الأول من النظرية ؛ أما الجزء الثاني فيمكن البرهان عليه بطريقة مماثلة ونترك للقارئ التفاصيل .

نستنتج من النظرية 7 أنه إذا كان f تماثلاً لِـ G في H فإن $f(G)$ تكون زمرة جزئية من H ، نسميها **صورة** f ونرمز لها بِـ

$$\mathrm{Im}\, f$$

كما أن المجموعة $f^{-1}(\{e\})$ المكونة من العناصر $x \in G$ بحيث $f(x) = e$ ، هي زمرة جزئية من G ، نسميها **نواة** f ونرمز لها بِـ

$$\mathrm{Ker}\, f$$

(كلمة صورة تترجم بِـ Image وكلمة نواة بِـ Kernel في الإنغليزية) .

مثال 18 - لتكن G زمرة ضربية ، $a \in G$ ولنعتبر التماثل $f: \mathbf{Z} \rightarrow G$ المعرّف بِـ $f(n) = a^n$. أن صورة f هي الزمرة الجزئية لِـ G المولدة عن a ، ونواة f هي الزمرة الجزئية لِـ $\mathbf{Z}$ المؤلفة من الأعداد الصحيحة n التي تحقق $a^n = 1$ (لقد أثبتنا واستعملنا في برهان النظرية 5 أن هذه الأعداد تكوّن زمرة جزئية) .

ملاحظة 7 - إذا كان N نواة التماثل $f: G \rightarrow H$ فإنه من أجل كل x في N و a في G يكون لدينا :

$$f(a\,x\,a^{-1}) = f(a)\,f(x)\,f(a)^{-1} = f(a) \cdot e \cdot f(a^{-1}) = e$$

وبالتالي :

$a\,x\,a^{-1} \in N$ مهما كان $a \in G$ و $x \in N$

نقول عن زمرة جزئية لِـ G أنها مميَّزة أو لا متغيرة إذا حققت العلاقة السابقة وهذا يعني أن :

$$s(N) \subset N$$

مهما كان التشاكل الذاتي الداخلي s للزمرة G .

نرى إذن أن نواة كل تماثل هي زمرة جزئية مميزة ؛ ويمكن أن نبرهن (انظر التمرين 16) ان العكس صحيح .

إذا كانت G تبديلية ، فمن الواضح أن كل زمرة جزئية منها تكون مميزة .

نظرية 8 - إذا كانت G و H زمرتين و f تماثلاً لِـ G في H فإن الشرط اللازم والكافي ليكون f تبايناً هو أن $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$.

بما أن $f(e) = e$ فإن $f(x) = e$ تعني $f(x) = f(e)$ ؛ إذا كان f تبايناً فإن العلاقة الأخيرة تستلزم $x = e$ أي $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$. لنفترض عكسياً أن نواة f لا تحتوي سوى e ؛ ولتكن العلاقة $f(x) = f(y)$ ، بما أن f تماثل فهذه الأخيرة تكتب على الشكل $f(xy^{-1}) = e$ ومنها نرى أن $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$ ؛ بما أن

فإن $\text{Ker}(f) = \{e\}$ فإن $xy^{-1} = e$ أو $x = y$ وينتج عن ذلك أن f متبايناً وهذا يتم البرهان.

نظرية 9 - إذا كانت G و H و M زمراً، و $p: G \to H$ و $f: G \to M$ تماثلين وإذا كان p غامراً فإن الشرطين التاليين متكافئان:

a) يوجد تماثل $f': H \to M$ بحيث $f = f' \circ p$

b) $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(f)$.

وإذا تحقق أحدهما فإن التماثل f' وحيد، ويكون f متبايناً إذا وإذا فقط $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$، ويكون غامراً إذا وإذا فقط كان f غامراً.

لنبحث أولاً عن الشرط الذي يجب أن يتحقق حتى يوجد تطبيق f' لـ H في M بحيث $f = f' \circ p$؛ إن النظرية 1 ف 2 تعطي الجواب: ينبغي أن نثبت أن العلاقة $p(x) = p(y)$ تستلزم $f(x) = f(y)$. لكن (بما أن p تماثل) العلاقة الأولى تكتب على الشكل

$$e = p(x)\, p(y)^{-1} = p(xy^{-1})$$

وبتعبير آخر $xy^{-1} \in \text{Ker}(p)$؛ ولنفس السبب فإن العلاقة الثانية تكتب على الشكل $xy^{-1} \in \text{Ker}(f)$؛ إذا أخذنا $y = e$ نرى أن العلاقة $x \in \text{Ker}(p)$ تستلزم $x \in \text{Ker}(f)$، وهذا يعني أن $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(f)$، ومن الواضح أن هذا الشرط كاف.

وهكذا فإن الشرط b) يكافؤ وجود تطبيق f' بحيث $f = f' \circ p$. هذا التطبيق تماثل: من أجل u و v في H، واعتماداً على كون p غامراً، فإنه يوجد x و y في G بحيث $u = p(x)$ و $v = p(y)$؛ إذن:

$$f'(uv) = f'\big(p(x)\, p(y)\big) = f'\big(p(xy)\big) = f(xy) = f(x)\, f(y)$$

$$= f'\big(p(x)\big)\, f'\big(p(y)\big) = f'(u)\, f'(v)$$

وهذا ما نريد إثباته.

بقي إثبات الجزء الأخير من النظرية. بما أن p غامر فإن العلاقة

$f_1' \circ p = f_2' \circ p$ تستلزم $f_1' = f_2'$ وهذا يثبت وحدانية f' . ومن جهة أخرى لدينا العلاقة :

$$f'(H) = f'\big(p(G)\big) = f(G)$$

ومنها نرى أن الشرط اللازم والكافي ليكون f' غامراً هو أن يكون f كذلك . لنبحث أخيراً عن نواة f'؛ انها مؤلفة من العناصر $u \in H$ التي تحقق $f'(u) = e$؛ نضع $u = p(x)$ ، ومن الواضح أن $f(x) = e$ أي $x \in \mathrm{Ker}(f)$؛ نرى إذن أن $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(p)$ أو بتعبير أدق :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p)$$

لأن الاحتواء المعاكس محقق بالفرض . وبهذا نكون قد أتممنا البرهان .

10. تطبيق على الزمر الدوارة

لتكن G زمرة دوارة مولدة عن عنصر x : كل عنصر من G إحدى قوى x؛ بتعبير آخر إن التماثل :

$$f : \mathbf{Z} \to G$$

المعرّف بـ

$$f(n) = x^n$$

يكون غامراً .

لتكن I نواة f؛ أن I زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ ، وبالتالي فإنه يوجد عدد صحيح $0 \leq p$ بحيث

$$I = p\,\mathbf{Z}$$

(انظر مثال 8) .

لدينا حالتان : الحالة الأولى هو أن يكون $p = 0$ ، عندئذٍ (نظرية 8) يكون f متبايناً وبالتالي متقابلاً ، وفي هذه الحالة تكون G في تشاكل مع الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}$.

أما إذا كان $p \neq 0$ ، فإننا إذا اعتبرنا التطبيق القانوني g لـ $\mathbf{Z}$ في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (مثال 11) ، نرى أنه غامر كما أنه تماثل ونواته تكون $p\,\mathbf{Z}$ ، بحيث يكون لدينا $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f)$.

حسب النظرية 9، فإنه يوجد تماثل وحيد :

$$f': \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z} \to G$$

بحيث $f = f' \circ g$ [هذا يعني أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن x^n هي صورة صف n وفق p حسب التطبيق f'، ان وجود f ناتج عن كون العلاقة $m \equiv n\ (p)$ تستلزم $x^m = x^n$ وهذا يعني أن x^n لا يتعلق بـ n وإنما يتعلق فقط بصف n وفق p ؛ ونشير هنا إلى أن هذا البرهان هو حالة خاصة من البرهان العام الذي استعملناه لإثبات النظرية 9] .

بما أن f غامر فإن f' غامر ، وبما أن $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ فإن f' متباين وبالتالي فإن f' تشاكل للزمرة الجمعية $\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$ في الزمرة G . وبصورة خاصة فإن الزمرتين لهما نفس عدد عدد العناصر ، أي p ؛ وهذا يميز العدد p : عدد عناصر G . إذن

نظرية 10 - كل زمرة دوارة غير منتهية تشاكل الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}$. كل زمرة دوارة منتهية تشاكل الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$ حيث p هو عدد عناصر G .

نستنتج طبعاً من هذا أن زمرتين دوارتين تكونان في تشاكل إذا وإذا فقط كان لهما نفس عدد العناصر (سواء كان منته أو غير منته) .

ليكن x عنصراً من زمرة كيفية G ؛ إن مرتبة x هي بالتعريف مرتبة (أو كاردينال) الزمرة الجزئية لـ G المولدة عن x ؛ وبما أن هذه الزمرة الجزئية هي صورة $\mathbf{Z}$ بالتماثل $n \mapsto x^n$ فنرى أن الشرط اللازم والكافي لتكون مرتبة x منتهية هو أنه يوجد p غير منعدم بحيث $x^p = e$ وتكون مرتبة x أصغر عدد موجب يحقق العلاقة السابقة.

11. الزمرة المؤثرة على مجموعة

إذا كانت لدينا زمرة G ومجموعة X فإننا نقول أن G **مؤثرة على** X إذا وجد تطبيق لِـ $G \times X$ في X ، يرمز له

$$(s, x) \mapsto s \cdot x \text{ ،}$$

يحقق الشروط التالية :

من أجل كل s و t في G ومن أجل كل $x \in X$ فإن $s \cdot (t \cdot x) = (st) \cdot x$ (علاقة التجميعية) .

من أجل كل x في X فإن $e \cdot x = x$ حيث e العنصر الحيادي للزمرة G .

مثال 19 - إن الزمرة تؤثر على نفسها بطرق كثيرة نذكر منها :

التطبيق $(s, x) \mapsto s . x$ (إنسحاب من اليسار)

والتطبيق $(s, x) \mapsto x \cdot s^{-1}$ (إنسحاب من اليمين)

والتطبيق $(s, x) \mapsto sxs^{-1}$ (تشاكل ذاتي داخلي)

مثال 20 - لتكن G زمرة و H زمرة جزئية منها ؛ نضع

$$X = G/H$$

مجموعة الصفوف xH في G (رقم 6) ؛ من أجل $s \in G$ و $A \in X$ فإن المجموعة sA المحتواة في G والمؤلفة من العناصر sa حيث a في A ، هذه هي المجموعة sA هي أيضاً صف وفق H (بالفعل ، إذا اعتبرنا عنصراً x في A فإن A تكون مؤلفة من العناصر xh حيث h ينتمي إلى H وبالتالي فإن sA هي مجموعة العناصر sxh ، أو بتعبير أخر ، إذا كان لدينا $A = xH$ فإن $sA = (sx)H$ ، وهذا يثبت أن $sA \in X$) ؛ يصبح بإمكاننا إذن تعريف تطبيقاً لِـ $G \times X$ في X وهو $(s, A) \mapsto sA$ ؛ ويمكن التحقيق بسهولة أن هذا التطبيق يجعل G مؤثرة على $X = G/H$.

مثال 21 – لتكن E مجموعة و p عدد طبيعي ؛ نضع $X = E^p$ مجموعة الجمل $(x_1, x_2, ..., x_p)$ ذات p عنصراً من E ، ونأخذ $G = \sigma_p$ زمرة تباديل المجموعة $\{1, 2, ..., p\}$.

من أجل $s \in G$ و $x = (x_1, x_2 ..., x_p)$ في X ، نعرّف $s \cdot x$ بالعلاقة

$$s \cdot x = (x_{s^{-1}(1)}, ..., x_{s^{-1}(p)})$$

وبذلك نحصل على تطبيق لِـ $G \times X$ في X يجعل G مؤثرة على X . بالفعل ، من أجل s و t في G و x في X ، نضع

$$t \cdot x = y = (y_1, ..., y_p)$$

بحيث يكون لدينا :

$$s \cdot (t \cdot x) = s \cdot y = (y_{s^{-1}(1)}, ..., y_{s^{-1}(p)}) \text{ ؛}$$

ومن جهة أخرى $y = (x_{t^{-1}(1)}, ..., x_{t^{-1}(p)})$

وبالتالي : $y_i = x_{t^{-1}(i)}$ ؛ $1 \leq i \leq p$

بحيث يكون لدينا ، إذا وضعنا :

$$z_i = y_{s^{-1}(i)} = x_{t^{-1}(s^{-1}(i))} = x_{(st)^{-1}(i)} \text{ ،}$$

$$s \cdot (t \cdot x) = (z_1, z_2, ..., z_p)$$

وبذلك نحصل على $s \cdot (t \cdot x) = (st) \cdot x$ ؛ أما العلاقة $e \cdot x = x$ فهي بديهية .

مثال 22 – لتكن X مجموعة ولتكن G زمرة من تحويلاتها . (مثال 7) ؛ إن التطبيق $(s, x) \mapsto s(x)$ ، لِـ $G \times X$ في X يجعل G مؤثرة على X .

نلاحظ أنه إذا كانت لدينا زمرة G مؤثرة على مجموعة X فإنه من أجل كل s في G ، إذا عرّفنا التطبيق :

$$\bar{s} : X \to X$$

بالعلاقة $\bar{s}(x) = s \cdot x$

فإن هذا التطبيق يكون متقابلاً نظراً لأن $x = x \cdot (s^{-1} s) = (s \cdot x) \cdot s^{-1}$. ويمكننا أيضاً تفسير الشروط المعطاة في بداية هذه الفقرة بقولنا أن $s \mapsto \bar{s}$ هو تماثل للزمرة G في زمرة من تحويلات المجموعة X .

لتكن G زمرة مؤثرة على مجموعة X ، من أجل كل x في X فإن العناصر $s \in G$ التي تحقق $sx = x$ تشكل طبعاً زمرة جزئية من G **ونسميها : مُثَبّت** x في G .

كما اننا نسمي **مدار** x بِـG ، المجموعة المؤلفة من عناصر X التي تكتب على الشكل $s \cdot x$ حيث $s \in G$ ، ونرمز لهذه المجموعة بِـ$G \cdot x$.

نجد تتمات عن هذه المفاهيم في تمارين هذا الفصل .

ف 8. الحلقات ، الحقول

1. تعريف الحلقات ، أمثلة

نسمي حلقة كل ثلاثية مؤلفة من مجموعة K وقانوني تشكيل داخل K نرمز لهما :

$(x, y) \mapsto x + y$ «الجمع في K»

$(x, y) \mapsto x y$ «الضرب في K»

بحيث تتحقق الشروط التالية :

A_1 ؛ $(K, +)$ زمرة تبديلية

A_2 ؛ قانون الضرب $(x, y) \mapsto xy$ تجميعي ويقبل عنصراً حيادياً(*) .

A_3 ؛ يكون لدينا من أجل كل x و y و z في K :

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y) z = xz + yz$$

ونقول عندئذٍ أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع .

نلاحظ أن الشرط A_1 يعني ما يلي :

(*) لا يفترض بعض المؤلفين وجود عنصر حيادي في تعريفهم للحلقة ؛ ويحصلون بذلك على تعريف أعم من التعريف المذكور في النص ؛ على أن التجربة تثبت ، وتؤكد النظريات ذلك ، أنه يمكن دائماً الاقتصار على الحلقات القابلة لعنصر حيادي ، وهو مافعلناه في هذا الكتاب .

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
$$x+y=y+x$$

يوجد في K عنصراً نرمز له 0 ويحقق من أجل كل $x \in K$ ، $x = x + 0$.

وأخيراً مهما كان $x \in K$ فإنه يوجد عنصر في K نرمز له $-x$ بحيث :

$$x+(-x)=0$$

وينتج عن ذلك إنه من أجل كل a و b في K فإن المعادلة

$$a+x=b$$

تقبل حلاً وحيداً في K وهذا الحل هو $b+(-a)$ ونكتبه على الشكل

$$x=b-a$$

أما الشرط A_2 فيعني ما يلي :

$$(xy)z=x(yz)$$

ويوجد في K عنصر نرمز له 1. بحيث يكون لدينا

$$x\,1=1\,x=x$$

من أجل كل x في K ، ويسمى العنصر 1 هذا : العنصر الواحدي ، أو وحدة الحلقة

نقول عن حلقة K أنها تبديلية إذا كان لدينا

$$xy=yx$$

من أجل كل x و y في K .

سنرى ، عند دراسة المصفوفات ، أنه توجد حلقات غير تبديلية . نقول عن x و y في الحلقة K أنهما يتبادلان إذا حققا :

$$xy=yx$$

لدينا في كل حلقة :

$$0x = x0 = 0 \text{ و } (-1)x = -x$$

بالفعل ؛ $$0x + x = 0x + 1x = (0 + 1)x = x$$

ومنه ، $$0x = x - x = 0$$

وبطريقة مماثلة نرى أن : $x0 = 0$ ،

ومن جهة أخرى ، لإثبات العلاقة الأولى يكفي أن نبرهن أن

$$(-1)x + x = 0$$

وهذا ينتج عن الحساب التالي :

$$(-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = 0$$

نأخذ الآن بعض الأمثلة حول الحلقات :

مثال 1 – إذا زَوَّدنا مجموعة الأعداد الصحيحة **Z** بقانون الجمع وقانون الضرب فإننا نحصل على حلقة تبديلية تسمى **حلقة الأعداد الصحيحة** ، وبنفس الطريقة نعرّف حلقة الأعداد الناطقة **Q** وحلقة الأعداد الحقيقية **R** .

مثال 2 – لتكن K مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تكتب على الشكل :

$$x = a + br + cr^2$$

حيث $r = \sqrt[3]{2}$ و a و b و c عناصر من **Q** ؛ يمكن بسهولة إثبات أن K مزودة بالجمع والضرب العاديين هي حلقة تبديلية .

مثال 3 – لتكن X مجموعة ما و K حلقة كيفية ؛ نرمز بـ A لمجموعة تطبيقات X في K . نعرف من أجل $f \in A$ و $g \in A$

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$fg : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

ونرى أن هذين العمليتين تجعلان A حلقة (تبديلية إذا وإذا فقط كانت الحلقة تبديلية) . لنثبت مثلاً خاصية التوزيع :

$$f(g+h) = fg + fh$$

وبما أن كل طرف هو تطبيق لِـ X في K يكفي أن نبرهن أنه من أجل كل $x \in X$ يكون لدينا :

$$\big(f(g+h)\big)(x) = (fg+fh)(x)$$

وهذا محقق نظراً للعلاقة التالية المحققة في الحلقة K :

$$f(x)\big(g(x)+h(x)\big) = f(x)\,g(x) + f(x)\,h(x) \,.$$

نشير هنا إلى أنه على القارئ المبتدئ أن يدرس هذا المثال بكل عناية ويتأكد أنه ينبغي استخدام كل شروط الحلقة K .

إن الحلقة A التي عرفناها، تسمى **حلقة تطبيقات المجموعة X في الحلقة K** .

مثال 4 - نعتبر المثال السابق حيث نضع $X = K = \mathbf{R}$ وبدل اعتبار كل تطبيقات X في K نقتصر على التطبيقات التي تحقق بعض الشروط المعطاة مسبقاً، كالاستمرار في نقطة، أو الاستمرار في كل نقطة، أو قابلية الاشتقاق المستمر في نقطة، الخ؛ في كل الحالات نحصل على حلقة تبديلية .

مثال 5 - سنرى في ما بعد، (ف 15) أن المصفوفات المربعة ذات n سطراً و n عموداً وذات عناصر من حلقة معينة K، تشكل حلقة (غير تبديلية إذا كان $n \geq 2$ حتى لو كانت K تبديلية) بالنسبة لعملية الجمع وعملية الضرب كما ستعرفان في ف 14 و ف 15 .

لتكن K حلقة ؛ نسمي **حلقة جزئية** من K، كل جزء A منها يحقق الشرط التالية :

A زمرة جزئية من الزمرة الجمعية K .

إذا كان x و y ينتميان إلى A فإن $xy \in A$

العنصر 1 ينتمي إلى A .

تحت هذه الشروط ، ان التطبيقين لِـ $A \times A$ في A

$$(x, y) \mapsto x + y$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

يعرفان قانوني تشكيل داخلي على A يجعلان هذه الأخيرة حلقة .

بالفعل إن المجموعة A مزودة بالجمع هي زمرة تبديلية حسب ف 7 رقم 3 ، ومن جهة أخرى فإن عملية الضرب تجميعية في A لأنها تجميعية في K وكذلك الشأن بالنسبة لخاصية التوزيع .

من الواضح في المثال 1 أن $\mathbf{Z}$ حلقة جزئية من $\mathbf{Q}$ التي هي بدورها حلقة جزئية من $\mathbf{R}$ ؛ كما أن حلقات المثال 4 هي حلقات جزئية من حلقة كل تطبيقات X في K حيث $X = K = \mathbf{R}$.

نشير أخيراً إلى أنه إذا أردنا إثبات أن جزء A في حلقة K^1 هو حلقة جزئية فيكفينا إثبات الشروط التالية :

إذا كان x و y في A فإن xy و $x + y$ ينتميان أيضاً إلى A ، كما أن $- 1 \in A$. لنبرهن ذلك ؛ وليكن $x \in A$ ، نرى أولاً أن $- x \in A$ لأن $- x = (- 1)x$ ؛ ومنه إذا كان x و y عنصرين من A فإن $x - y \in A$ لأن : $x - y = x + (- y)$ وهذا يعني أن A زمرة جزئية من الزمرة الجمعية K ؛ ومن جهة أخرى بما أن A تحتوي $- 1$ فهي أيضاً تحتوي $1 = (- 1)(- 1)$ أي أن الشرط الثالث محقق ؛ أما الشرط الثاني فهو محقق فرضاً .

2. الحلقات التامة ؛ الحقول

لتكن K حلقة ، ولنعتبر المعادلة

$$ax = b \qquad (1)$$

حيث a و b عنصرين معينين في K و x عنصر «مجهول» من K. الحالة الخاصة البسيطة هي لما يكون $a = 0$، فبما أن $0x = 0$، لا تكون هناك إلا حالتان: $b = 0$ وعندئذٍ كل $x \in K$ يحقق المعادلة (1)، أو $b \neq 0$ وعندئذٍ لا تقبل المعادلة أي حل.

هناك أيضاً حالة خاصة ثانية وهي أن a يقبل عنصراً عكسياً بالنسبة للضرب. أي أنه يوجد عنصر في K (عنصر وحيد)، نرمز له a^{-1} ويحقق $a^{-1} a = aa^{-1} = 1$ (ونقول أن a **قابل للقلب**)؛ عندئذٍ، حسب النظرية 4 ف 6، يوجد حل وحيد وهو

$$x = a^{-1} b$$

بقي لنا دراسة الحالة العامة حيث a غير منعدم وغير قابل للقلب، ونبدأ بالنقطة التالية: هل يمكن للمعادلة (1) أن تقبل أكثر من حل؟، لنفترض أن x و y حلّان، إذن

$$a(x - y) = 0$$

وهذا يدعونا إلى إدخال المفهوم التالي: نقول عن حلقة K أنها **تامة** إذا كان لدينا من أجل $u \in K$ و $v \in K$؛ $uv = 0$ يستلزم $u = 0$ أو $v = 0$، (أي أن جداء عنصرين من K لا يكون معدوماً إلاّ إذا كان أحدهما معدوماً). $\mathbf{Z}$ هي طبعاً حلقة تامة.

إذا كانت لدينا حلقة تامة، فإن المعادلة (1) تقبل حلاً وحيداً على الأكثر لما يكون $a \neq 0$، على أنه يمكن لها ألّا تقبل أي حل على الإطلاق مثلاً $3x = 2$ في الحلقة $\mathbf{Z}$.

نلاحظ هنا أن الحالة العامة التي أشرنا إليها حيث $a \neq 0$ و a غير قابل للقلب لا تحدث دائماً، إذ توجد حلقات حيث كل عنصر غير منعدم يكون قابلاً للقلب، وإذا كانت هذه الخاصية محققة في حلقة فإن هذه الأخيرة تسمى حقل(*). فالحلقة $\mathbf{Q}$ مثلاً هي أيضاً حقل ونفس الشيء بالنسبة للحلقة $\mathbf{R}$. ومن البديهي أن كل حقل هو حلقة تامة.

(*) في الواقع نشترط عند تعريف الحقل أن $0 \neq 1$ بحيث يتألف كل حقل من عنصرين على الأقل.

هذا وإنه توجد حلقات غير تامة ؛ لنعتبر حلقة كل التطبيقات لِـ **R** في **R** (مثال 3 السابق) ونعرّف عنصرين f و g منها :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{إذا كان } x \geq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x \geq 0 \\ x & \text{إذا كان } x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا $f \cdot g = 0$ في الحلقة المشار إليها، رغم أن $f \neq 0$ و $g \neq 0$ (هنا التطبيق 0 هو التطبيق المنعدم أي الذي يقابل كل عنصر X بالعنصر 0 في الحلقة K) .

ملاحظة 1 - إذا كانت A حلقة فإننا نرمز عادة بِـ A^* مجموعة عناصر A القابلة للقلب ، وحسب النظرية 3 ف 6 ، فإنه إذا كان x و y ينتميان إلى A^* فإن $xy \in A^*$ وهذا يمكننا من تزويد المجموعة A^* بقانون التشكيل الداخلي ، $(x, y) \mapsto xy$ ، وتكون A^* زمرة بالنسبة لهذا القانون ؛ بالفعل ، هذا القانون تجميعي في A^* لأنه تجميعي في A ، $1 \in A^*$ وأخيراً حسب النظرية 3 ف 6 فإن $x \in A^* \Leftarrow x^{-1} \in A^*$ وبما أن $x x^{-1} = x^{-1} x = 1$ نرى أن كل عنصر من A^* قابل للقلب في A^* (وليس فقط في A) .

نسمي المجموعة A^* المعرّفة سابقاً **بالزمرة الضربية للحلقة** A وإذا كان K حقلاً فيكون لدينا $K^* = K - \{0\}$.

ومن الواضح أن $\mathbf{Z}^* = \{-1, +1\}$ ، ويكون جدول قانون الضرب في $\mathbf{Z}^*$ كما يلي :

.	1	− 1
1	1	− 1
− 1	− 1	1

إن A^* تسمى أيضاً : زمرة وحدات A .

ملاحظة 2 - ليكن K حقلاً ؛ نقول عن جزء A من K أنه **حقل جزئي** إذا كان لدينا :

a) A حلقة جزئية من K .

b) من أجل كل $x \in A - \{0\}$ فإن $x^{-1} \in A$.

ومن الواضح في هذه الحالة أن اقتصار قانوني K على A يجعل هذا الأخير حقلاً، ($\mathbf{Q}$ حقل جزئي من $\mathbf{R}$) .

مثال 6 – لتكن K مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق الخاصية: يوجد عددان ناطقان a و b بحيث:

$$x = a + br$$

مع $r = \sqrt{2}$ ؛ وبإمكان القارئ التأكد من أن K هو حقل جزئي من $\mathbf{R}$.

3. الحلقة $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

عرّفنا في المثال 9 ف 4، عرّفنا المجموعة $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ من أجل كل عدد صحيح p . وفي المثال 14 من نفس الفصل عرّفنا على $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ قانوني تشكيل داخلي (جمع وضرب) مرتبطين بقانوني الحلقة $\mathbf{Z}$، بحيث إذا كان $\theta : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ التطبيق القانوني، فإنه يكون لدينا:

$$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$$
$$\theta(xy) = \theta(x) \cdot \theta(y)$$

وهدفنا الآن هو إثبات أن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حلقة تبديلية إذا زودناها بعملية الجمع وعملية الضرب المعرّفتين في ف 4 .

لنبرهن أولاً أن عملية الجمع هذه تجميعية .

لتكن α و β و γ ثلاث عناصر من $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$؛ بما أن θ غامر، فإنه توجد x و y و z في حلقة $\mathbf{Z}$ بحيث:

$$\alpha = \theta(x) \text{ ، } \beta = \theta(y) \text{ ، } \gamma = \theta(z) \text{ ؛}$$

ومنها :

$$\alpha + \beta = \theta(x) + \theta(y) = \theta(x + y)$$
$$\beta + \gamma = \theta(y) + \theta(z) = \theta(y + z)$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \theta(x + y) + \theta(z) = \theta\big((x + y) + z\big)$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = \theta(x) + \theta(y + z) = \theta\big(x + (y + z)\big)$$ ؛

وينتج عن ذلك أن الجمع في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ تجميعي إذ انه تجميعي في $\mathbf{Z}$. وبطريقة مماثلة يمكن أن نبرهن أن الضرب التجميعي وتبديلي وتوزيعي بالنسبة للجمع وأن هذا الأخير تبديلي. ومن ناحية أخرى، لدينا :

$$\theta(1)\,\theta(x) = \theta(1x) = \theta(x)$$
$$\theta(0 + x) = \theta(0) + \theta(x) = \theta(x)$$

أي أن $\theta(1)$ هو عنصر حيادي عملية الضرب في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ وأن $\theta(0)$ عنصر حيادي عملية الجمع.

أخيراً، من أجل كل α في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ نضع $\alpha = \theta(x)$ حيث $x \in \mathbf{Z}$، لدينا :

$$\theta(x) + \theta(-x) = \theta(0)$$

ومنه فإن $\theta(-x)$ هو نظير α بالنسبة للجمع ومنه فإن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حلقة تبديلية وتسمى : حلقة الأعداد الصحيحة بترديد p ؛ ومن الواضح أنه إذا كان $p \neq 0$ فإن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ منتهية ومؤلفة من p عنصراً (إذا افترضنا $p > 0$ وهذا دائماً ممكن). وبالنسبة لبعض قيم p فإن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ يكون حقلاً (وهذا يثبت وجود حقول منتهية أي حقول ذات عدد منته من العناصر).

نظرية 1 - ليكن p عدداً صحيحاً بحيث $p \geq 2$. النصوص التالية متكافئة :

(a) $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حلقة تامة

(b) $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حقل

(c) p عدد أولي.

نبدء بالتحقيق من أن $(a) \Leftrightarrow (c)$ ونعتبر لأجل ذلك عنصرين α و β غير معدومين من $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: يوجد x و y في $\mathbf{Z}$ بحيث :

$$\beta = \theta(y) \quad \text{و} \quad \alpha = \theta(x)$$

مع :

$$y \not\equiv 0(p) \quad \text{و} \quad x \not\equiv 0(p)$$

وبما أن $\alpha\beta = \theta(xy)$ فإن $\alpha\beta$ يكون غير منعدم في $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ إذا وإذا فقط كان لدينا : $xy \not\equiv 0(p)$.

أو بتعبير أخر : الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حلقة تامة هو القول :

إذا كان p يقسم xy فإنه يقسم x أو يقسم y . ومنها نحصل على $(a) \Leftrightarrow (c)$.

ومن ناحية أخرى ، من الواضح أن $(b) \Rightarrow (a)$ ؛ ولأجل إتمام برهان النظرية بقي لنا $(a) \Rightarrow (b)$ وهذا ينتج عن النظرية التالية التي تعمم النتيجة السابقة .

نظرية 2 - إذا كانت K حلقة تامة ومنتهية فهي أيضاً حقل .

ليكن $a \in K$ و $a \neq 0$ ولنعتبر التطبيق $x \mapsto ax$ لـ K في نفسه . هذا التطبيق متباين لأن $ax = ay$ تعني $a(x - y) = 0$ ومنها $x = y$ لأن الحلقة تامة و $a \neq 0$ وبما أن K منتهية فإن التطبيق غامر ويوجد بالتالي $x \in K$ بحيث $ax = 1$ ؛ وهذا يعني أن كل عنصر $a \neq 0$ قابل للقلب من اليمين وبطريقة مماثلة ، وباستخدام التطبيق $x \mapsto xa$ ، نبرهن أن $a \neq 0$ يقبل القلب من اليسار وهذا ينهي البرهان .

ملاحظة 3 - يمكن أن نبرهن أن كل حقل منته يكون حتماً تبديلياً ؛ لكن البرهان يعتمد على مفاهيم يتعدى مستواها هذه الدراسة .

ويمكن أن نبرهن أيضاً أنه إذا كان K حقلاً و n عدد عناصره ، فإن $n = p^m$ من أجل عدد أولي p وعدد طبيعي m ؛ كما انه من أجل كل عدد

أولي p وكل عدد طبيعي m ، يوجد حقل مؤلف من p^m عنصراً (وهذا الحقل وحيد) . وهذا يعني أنه بإمكاننا إنشاء كل الحقول المنتهية .

4. دستور ثنائي الحد (أو ذي الحدّين)

إن بعض الدساتير التي تعطى في الدراسة الثانوية يمكن تعميمها إلى الحلقات . فإذا كان x و y عنصرين في حلقة بحيث $xy = yx$ ، فإنه يكون لدينا :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

وبصفة عامة يكون لدينا :

نظرية 3 - إذا كان x و y عنصرين من حلقة بحيث $yx = xy$ فإنه يكون لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$$

حيث .

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}$$

مع $(0 \leq p \leq n)$

ملاحظة 4 - نُذَكِّرُ أنّ الأعداد $\binom{n}{p}$ هي أعداد طبيعية (انظر نظرية 10 ف 5) .

إن النتيجة المطلوب إثباتها بديهية من أجل $n = 1$ لنتحقق من أن

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} x^{n-p-1} y^p$$

تستلزم الدستور المذكور. ولأجل ذلك نقوم بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ$(x+y)$ وعندئذٍ يكون لدينا:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} x^{n-p} y^p + \sum_{p=0}^{p=n-1} \binom{n-1}{p} x^{n-1-p} y^{p+1}$$

ليكن r عدداً طبيعياً بحيث $0 < r < n$ ونلاحظ أن الحد $x^{n-r} y^r$ يوجد ضمن حدين من حدود الطرف الأيمن من المعادلة السابقة: أحدهما في المجموع الأول عندما نأخذ $p = r$ (ويكون المعامل $\binom{n-1}{r}$) والآخر في المجموع الثاني عندما نأخذ $p = r - 1$ [ويكون المعامل $\binom{n-1}{r-1}$]. ومن هنا، لإتمام البرهان يكفينا التحقق من:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

إن الطرف الأيمن للعلاقة السابقة يساوي:

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)} =$$

$$= \frac{(n-1)\dots(n-r+1)(n-r) + (n-1)\dots(n-r+1)r}{r!}$$

$$= \frac{[(n-r)+r](n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$$

إن العلاقة

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

تساعد على حساب الأعداد $\binom{n}{r}$ وتسمى هذه الأخيرة مضاريب ثنائي الحد، ويمكن الحصول عليها اعتماداً على الجدول التالي، وهو: مثلث باسكال «Triangle de Pascal».

1	1						
1	2						
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	25	21	7	1

. . . .

ومن أجل حساب الحد p في السطر n نجمع الحد p والحد $p - 1$ من السطر $n - 1$ ، ويعتمد هذا الجدول على العلاقة

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

الناتجة عن تعريف $\binom{n}{r}$.

5. نشر جداء مجاميع

نعطي هنا تعميماً لدستور ثنائي الحد ، لتكن K حلقة تبديلية و I مجموعة منتهية ، ولتكن $(x_i)_{i \in I}$ و $(y_i)_{i \in I}$ جماعتين من عناصر K . نهدف إلى «نشر» الجداء

$$\prod_{i \in I} (x_i + y_i)$$

ونُدخل لأجل ذلك الاصطلاح التالي : إذا كان F جزء من I نضع

$$x_F = \prod_{i \in F} x_i \; ; \; y_F = \prod_{i \in F} y_i$$

$$(\text{مع :} \quad x_\Phi = y_\Phi = 1)$$

ونحصل على الدستور التالي :

$$\prod_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{F \subset I} x_F \, y_{I-F}$$

حيث نأخذ المجموع في الطرف الأيمن بالنسبة لكل أجزاء I . للتحقق من ذلك نلاحظ أن حساب الطرف الأيسر يعود إلى ما يلي : نأخذ بعض المجاميع $(x_i + y_i)$ ، (أي اننا نأخذ $I \supset F$ و $i \in F$) ونقوم بضرب العناصر x_i في بعضها ، (نحصل على x_F) ثم نضرب النتيجة بالعناصر y_j الغير مأخوذة في المجاميع $(x_i + y_i)$ ثم نضرب النتيجة بالعناصر y_j الغير مأخوذة في المجاميع $(x_i + y_i)$ المختارة آنفاً. ونقوم بهذه العملية من أجل كل الاختيارات الممكنة ثم نجمع النتائج أي $x_F\, y_{I-F}$ مهما كان F جزء من I ونحصل على الدستور.

إن دستور ثنائي الحد هو حالة خاصة من الدستور السابق بحيث نأخذ I مجموعة مؤلفة من n عنصراً، ثم نختار

$x_i = x$ و $y_i = y$ من أجل كل $i \in I$.

عندئذٍ يكون الطرف الأيسر من المعادلة يساوي $(x + y)^n$ أما الطرف الأيمن فهو :

$$\sum_{F \subset I} x_F\, y_{I-F} = \sum_{\substack{F \subset I \\ \text{Card } F = r}} x^r\, y^{n-r}$$

بقي أن نلاحظ أنه ضمن مجموعة مؤلفة من n عنصراً فإنه يوجد $\binom{n}{r}$ جزء مؤلف من r عنصراً.

وهذا يمكننا من الحصول على دستور ثنائي الحد.

6. تماثل الحلقات

لتكن K و L حلقتين و f تطبيقاً لِـ K في L ، نقول عن f أنه تماثل حلقات ، إذا كان لدينا من أجل كل x و y في K :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x)\, f(y)$$
$$f(1) = 1$$

مثال 7 - إن التطبيق القانوني $\theta : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ هو تماثل حلقات (وفي الواقع أن إختيار بنية $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ كان لأجل ذلك).

مثال 8 - لتكن X مجموعة و K حلقة و L حلقة تطبيقات X في K (مثال 3). من أجل كل $x \in K$، فإن التطبيق $f \mapsto f(x)$ للحلقة L في الحلقة K هو تماثل حلقات.

إن خواص تماثل الحلقات شبيهة بخواص تماثل الزمر (ف 7 رقم 8 و 9). ليكن $f : K \to L$ و $g : L \to M$، تماثلا حلقات، إن $g \circ f$ يكون أيضاً تماثل حلقات.

وإذا كان التماثل $f : K \to L$ متقابلاً فنقول عنه إنه **تشاكل حلقات** ونقول أن K و L **متشاكلتان**؛ هذا وأن العلاقة «يوجد تشاكل للحلقة K في الحلقة L» هي علاقة تكافؤ في جماعة الحلقات.

إذا كان $f : K \to L$ تماثل حلقات فإننا نعرّف **نواة** f (ونرمز لها $\text{Ker}(f)$) بمجموعة عناصر $x \in K$ التي تحقق $f(x) = 0$، ويكون لدينا:

$$\text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{ تباين } f$$

ليكن $I = \text{Ker}(f)$ حيث f تماثل حلقات؛ $f : K \to L$ ونظراً للعلاقتين؛

$$f(x - y) = f(x) - f(y)$$
$$f(a\,x\,b) = f(a)\,f(x)\,f(b)$$

فإن: (i) I زمرة جزئية جمعية من K.

(ii) لدينا $a\,x\,b \in I$ مهما كان a و b في K و x في I.

كل جزء من حلقة K يحقق (i) و (ii) يسمى **مثالي**.

ملاحظة 4 - نقول عن جزء I من حلقة K أنه **مثالي من اليسار** إذا كان زمرة جزئية من K وإذا حقق $a\,x \in I$ مهما كان $x \in I$ و $a \in K$ (أي أن مضاعفات x من اليسار تنتهي إلى I، إذا كان $x \in I$). ويمكن القول عن جزء $I \neq \Phi$ بحيث $I \subset K$ انه مثالي من اليسار، إذا تحققت الخاصية:

من أجل كل u و v في K وكل x و y في I فإن

$$xu + yv \in I$$

وبطريقة مماثلة نعرّف **المثالي من اليمين**: وهو جزء I من حلقة K مع $I \neq \Phi$ ويحقق:

$$ux + vy \in I$$

مهما كان u و v في K و x و y في I.

إذا كانت K تبديلية فليس هناك فرق بين مثالي ومثالي من اليمين ومثالي من اليسـار.

مثال 9 - إذا كان K حقلاً فإن المثاليين الوحيدين هما $\{0\}$ و K، إذ أنه إذا كان I مثالي من اليسـار (أو مثالي) يحتوي عنصراً a غير منعدم، أي قابل للقلب، فإنه يحتوي أيضاً $a^{-1} a = 1$ ومنه فإنه يحتوي كل عنصر $u \in K$ إذ أن $u = u\,1$ وبالتالي $I = K$. ويمكن للقارئ أن يتحقق أنه إذا كان $0 \neq 1$ فإن الخاصية المذكورة تميز الحلقات التي هي حقول.

مثال 10 - لتكن K حلقة تبديلية، من أجل كل $x \in K$ نرمز بـ xK لمجموعة **مضـاعفات** x في K، أي هي مجموعة كل العناصر ux حيث $u \in K$. ان xK مثالي من K (كل مثالي من هذا الصنف يسمى **مثالي رئيسي**). نقول عن حلقة أنها **رئيسية** إذا كانت تبديلية وتامة وكل مثالي منها رئيسي. فالحلقة **Z** رئيسية لأن كل مثالي منها هو زمرة جزئية وبالتالي من الشكل n **Z** حسب المثال 8 ف 7؛ وسنرى في ف 31 (ويمكن للقارئ أن يدرس ذلك الآن) انه يمكن تعميم خواص قسمة الأعداد الصحيحة إلى عناصر حلقة رئيسية.

نشير أخيراً إلى أنه توجد حلقات غير رئيسية: مثلاً الحلقة الجزئية من **R** المؤلفة من الأعداد $(x + y\sqrt{10})$ مهما كان x و y في **Z**.

إن دراسة هذه الحلقة والحلقات المشـابهة (والأكثر تعقيداً كحلقة الأعداد الجبرية) أدت برياضيي القرن المـاضي إلى اختراع مفهوم المثالي.

ف : 9. الأعداد العقدية.

1. الجذور التربيعية

لتكن K حلقة تبديلية. نقول عن عنصر $d \in K$ أنه **مربع في** K إذا وجد $x \in K$ بحيث

$$x^2 = d ؛$$

ونقول عندئذٍ عن x أنه **جذر تربيعي لِـ** d في K. وإذا كان x جذراً تربيعياً لِـ d في K فمن الواضح أن لِـ $x-$ نفس الخاصية؛ وإذا كانت K تامة فإن d لا تقبل أكثر من جذرين تربيعيين في K، إذ أن العلاقة $x^2 = y^2$ تكتب في كل الأحوال على الشكل $(x - y)(x + y) = 0$، وبما أن K تامة فإنه يكون بالضرورة $y = x$ أو $y = -x$.

قد يحصل بطبيعة الحال أن عنصرا d من حلقة تبديلية K لا يكون مربعاً في K: إذا كان K هو حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ فإن الشرط اللازم ليكون d مربعاً في K هو كون $d \geq 0$. وفي حقل الأعداد الناطقة $\mathbf{Q}$، العدد 2 ليس مربعاً (على أن 2 مربعاً في الحقل $\mathbf{R}$).

ويقودنا هذا إلى دراسة المسألة التالية: إذا كانت K حلقة تبديلية و d عنصراً من K ليس مربعاً في K، هل يمكن إنشاء حلقة تبديلية L تحقق الخواص التالية: K حلقة جزئية من L، و d مربع في L؟

إن حل هذه المسألة عندما نأخذ $K = \mathbf{R}$ و $d = -1$، هو الذي أدّى إلى إكتشاف «الأعداد العقدية» تاريخياً ولفهم إنشاء هذه «الأعداد»

ينبغي دراسة المسألة على الصورة العامة التي طرحناها ؛ وسنقوم بذلك في بقية هذا الفصل .

2. تمهيد

ليكن إذن d عنصراً من حلقة تبديلية K ؛ ونفترض في هذه الفقرة أن للمسألة المطروحة آنفاً حل ، ولتكن L حلقة تبديلية تكون K حلقة جزئية منها وليكن w جذراً تربيعياً لِـ d في L .

لنرمز بِـ L' لمجموعة العناصر $z \in L$ التي تحقق الشرط التالي : يوجد $x, y \in K$ بحيث :

$$z = x + wy \tag{1}$$

عندئذٍ فإن L' حلقة جزئية من L ، تحتوي K ويقبل فيها d جذراً تربيعياً .

بالفعل ؛ من البديهي أن L' تحتوي K (نأخذه $y = 0$ في (1)) وتحتوي أيضاً w (نأخذ $x = 0$ و $y = 1$) ، بقي التأكد من أن L' جزئية من L ؛ وبما أن L' تحتوي $1 -$ ، نظراً لأنها تحتوي K ، يكفي أن نبرهن أنه إذا كانت L' تحتوي عنصرين من L فهي تحتوي أيضاً مجموعهما وجداءهما ؛ وهذا ينتج عن الدستورين

$$(x' + wy') + (x'' + wy'') = (x' + x'') + w(y' + y'') \text{ ،} \tag{2}$$

$$(x' + wy')(x'' + wy'') = (x'x'' + dy'y'') + w(x'y'' + x''y') \text{ ،} \tag{3}$$

وهما ناتجان عن العلاقة

$$w^2 = d \text{ .} \tag{4}$$

إن النتيجة السابقة تشير إلى إمكانية إنشاء L بحيث كل عنصر منها

يكون على الشكل (1)، وذلك بمجرد قبول إمكانية حل المسألة المطروحة في البداية، أي إنشاء حلقة L تحتوي عنصراً $w \in L$ يحقق (4) وبحيث تكون K حلقة جزئية من L. وبتعبير آخر، إذا إعتبرنا التطبيق $f: K \times K \rightarrow L$ المعرّف بالعلاقة

$$f(x, y) = x + wy ،$$

فبإمكاننا إفتراض f غامراً.

ملاحظة 1 - إذا كان K حقلاً و d غير مربع في K فإن التطبيق f يكون أيضاً متبايناً، إذ أنّ العلاقة $x' + wy' = x'' + wy''$، تكتب على الشكل

$$x + wy = 0 \quad \text{حيث} \quad x = x' - x'' \quad \text{و} \quad y = y' - y'' ؛$$

وإذا كان $y \neq 0$ فإنه قابل للقلب في K (إذ أن K حقل)، وبالأحرى في L، ومنه فإن $x + wy = 0$ تستلزم

$$w = -y^{-1} x \in K ،$$

وهذا يناقض افتراض كون d غير مربع في K. وهكذا نرى أن $y = 0$ وبالتالي $x = 0$، أي $x' = x''$ و $y' = y''$، ما يثبت أن f متباين.

نلاحظ أن اعتبار التطبيق f، يسمح كتابة الدستورين (2) و (3) على الشكل

$$f(x', y') + f(x'', y'') = f(x' + x'', y' + y'') \tag{2bis}$$

$$f(x', y') \cdot f(x'', y'') = f(x'x'' + dy'y'', x'y'' + x''y') \tag{3bis}$$

وإذا افترضنا المسألة المطروحة في البداية قد حُلّت، فإن الدستورين الأخيرين يكونان نقطة انطلاقنا من أجل إنشاء حلاً فعلياً للمسألة المطروحة.

3. الحلقة $K[\sqrt{d}]$

ليكن d عنصراً من حلقة تبديلية K ، نهدف إنشاء حلقة جديدة L ، يرمز لها عادة

$$K[\sqrt{d}]$$

وتكون معرّفة كما يلي : المجموعة L هي الجداء الديكارتي $K \times K$ ، بحيث كل عنصر من L يكون زوجاً (x, y) من عناصر K ؛ ونعرّف العمليتين الأساسيتين في L بالدستورين :

$$(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'') \tag{2ter}$$

$$(x', y') \cdot (x'', y'') = (x'x'' + dy'y'', x'y'' + x''y') \tag{3ter}$$

حيث استخدمنا العنصر المعطى d وقانوني تشكيل الحلقة K .

ليس بديهياً، بطبيعة الحال أن الدستورين السابقين يجعلان $K \times K$ حلقة تبديلية ، وينبغي إثبات ذلك في الحالة العامة مع العلم أن الحالة المعروفة $K = \mathbf{R}$ و $d = -1$ هي حالة خاصة لا يكون برهانها أصعب أو أبسط مما سنثبته .

نلاحظ في البداية أن $K \times K$ ، مزودة بالجمع المعرّف في (2^{ter}) ، زمرة تبديلية ، وذلك حسب ف 7 ، رقم 2 (الجداء المباشر للزمر) ، ولكَوْن المجموعة K زمرة تبديلية إذا زودناها بقانون الجمع المعرّف عليها .

لنبرهن الآن أن عملية الضرب (3^{ter}) تجميعية . لدينا بالتعريف

$$(x, y)[(x', y')(x'', y'')] = (x, y)(x'x'' + dy'y'', x'y'' + x''y') =$$

$$= \big(x(x'x'' + dy'y'') + dy(x'y'' + x''y'), x(x'y'' + x''y') + y(x'x'' + dy'y'')\big)$$

ومن جهة أخرى ،

$$[(x, y)(x', y'')](x'', y'') = (xx' + dyy', xy' + x'y)$$

$$= \big((xx' + dyy')x'' + d(xy' + x'y)y'', (xx' + dyy')y'' + x''(xy' + x'y)\big)$$

وبمقارنة النتيجتين السابقتين، اعتماداً على قوانين الحساب في K، نحصل على تجميعية الضرب. وبحساب مماثل يمكن أن نبرهن أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع وتبديلي.

وأخيراً، من العلاقة

$$(1, 0)(x, y) = (x, y)،$$

نرى أن $K \times K$، مزودة بعملية الضرب (3^{ter})، تقبل عنصراً حيادياً.

إن المجموعة $K \times K$، مزودة بالقانونين (2^{ter}) و (3^{ter})، هي بالفعل حلقة تبديلية.

لنبرهن الآن أن K تشاكل حلقة جزئية من $K \times K$؛ ونعتبر، لهذه الغاية، التطبيق $j : K \to K \times K$، المعرّف بالدستور:

$$j(x) = (x, 0)؛$$

ومن الواضح أن هذا التطبيق متباين؛ وبالإضافة إلى ذلك؛ لدينا، بعد حساب بسيط

$$j(x') + j(x'') = j(x' + x'')؛ j(x'x'') = j(x') \cdot j(x'')؛ j(-1) = (-1, 0) = -1$$

حيث -1، الموجود في آخر السطر السابق، هو نظير العنصر الحيادي $(1, 0) = 1$ في الحلقة $K \times K$؛ وبذلك، فإن الدساتير السابقة تشير إلى أن j هو تشاكل لـ K في حلقة جزئية من $K \times K$.

بما أن j يحوّل قوانين تشكيل K إلى قوانين الحلقة $j(K)$ الجزئية من $K \times K$، فلا يوجد أيّ مانع من مطابقة كل عنصر x من K مع العنصر $j(x)$ من $K \times K$، وهذا ما نفترضه في ما يلي(*).

(*) إن الوسيلة التي استعملناها تشابه تلك التي تسمح بمطابقة الأعداد الصحيحة مع أعداد ناطقة خاصة (أو الأعداد الناطقة مع أعداد حقيقية خاصة). ومهما كانت الطرق المستعملة لتعريف الأعداد الصحيحة والأعداد الناطقة، فليس صحيحاً أن العدد الصحيح n والعدد الناطق المعرّف بـ $\frac{n}{1}$ متطابقين؛ والشيء الوحيد الذي يمكن قوله هو أن التطبيق "$n \to \frac{n}{1}$"، متباين ويحوّل العمليات الجبرية للأعداد الصحيحة في العمليات المرافقة في الأعداد الناطقة. وهذا ما يجعلنا لا نفرّق عملياً بين n و $\frac{n}{1}$.

حتى نثبت أننا قد قمنا بحل المسألة المطروحة، بقي أن نوضح أن العنصر d من K مربع في $K[\sqrt{d}]$. وليكن لأجل ذلك العنصر w من L بحيث

$$w = (0, 1) \tag{5}$$

وبواسطة حساب بديهي نحصل على

$$w^2 = (0, 1)\ (0, 1) = (0 \cdot 0 + d \cdot 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (d, 0) = j(d)$$

ونكون بذلك قد برهنا أن $w^2 = d$ لأننا قد اصطلحنا مطابقة كل عنصر $x \in K$ مع العنصر $j(x)$ من L .

وهكذا، فإننا لم نقم بحل المسألة المطروحة فحسب، بل أنشأنا أيضاً حلاً «قانونياً» لهذه المسألة، وهو الحلقة $K[\sqrt{d}]$ التي نقول عنها أنها ناتجة عن إضافة جذر تربيعي لِـ d إلى K ، ونسمي الحلقة $K[\sqrt{d}]$ ، توسيعاً تربيعياً لِـ K .

ونختم عمليات الإنشاء هذه بالإشارة إلى اصطلاح مناسب لكتابة عناصر $K[\sqrt{d}]$. لدينا أولاً من أجل كل $x \in K$.

$$(x, 0) = x \tag{6}$$

نظراً لما سبق حول مطابقة x مع $j(x)$؛ وبحساب بسيط، نرى أنه من أجل كل $x, y \in K$ يكون لدينا

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) ؛$$

أي، اعتماداً على (5) و (6)، يكون

$$(x, y) = x + wy \tag{7}$$

وبذلك نحصل على الوضعية المدروسة في رقم 2، حيث افترضنا المسألة قد حلّت.

ونشير في الختام، إلى أن كل عنصر من $K[\sqrt{d}]$ ، يكتب وبصورة وحيدة، على الشكل $x + wy$ ، وأن هذه الملاحظة، بالإضافة إلى مسلمات الحلقة التبديلية والعلاقة

$w^2 = d$ ، (4)

كل هذا المعطيات كافية للقيام بكل العمليات التي نكون بحاجة لها : وبعبارة أخرى ، يمكن للقارئ أن ينسى ، ابتداء من الآن ، عملية إنشاء الحلقة $K[\sqrt{d}]$ ، وأن يحتفظ فقط بالخواص .

مثال 1 - إن الحالة الأكثر أهمية هي تلك التي يكون فيها K حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ، أي $K = \mathbf{R}$ ، و$d = -1$.

ونرمز بـ$\mathbf{C}$ للحلقة $\mathbf{R}[\sqrt{-1}]$ التي نحصل عليها ، ونسمي عناصرها : الأعداد العقدية ، وهكذا يكون العدد العقدي عبارة عن زوج (x, y) من الأعداد الحقيقية ، ويكون الحساب في الأعداد العقدية معتمداً على الدستورين (2^{ter}) ، و (3^{ter}) حيث $d = -1$ ، أي

$$(x', y') + (x'', y'') = (x' + x'', y' + y'')$$

$$(x', y') \cdot (x'', y'') = (x'x'' - y'y'', x'y'' + x''y')$$

نلاحظ اننا لا نستعمل هذين الدستورين في مجال التطبيقات ، بل نكتفي بالخواص التالية للأعداد العقدية :

أ) تؤلف مجموعة الأعداد العقدية حلقة تبديلية $\mathbf{C}$ (سنرى في ما بعد أن $\mathbf{C}$ حقل)

ب) الحقل $\mathbf{R}$ للأعداد الحقيقية هو حلقة جزئية من $\mathbf{C}$

ج) يوجد عدد عقدي i بحيث $i^2 = -1$
(i تعوض w التي استخدمناها في التوسيعات الربيعية) .

د) يكتب كل عدد عقدي z على الشكل

$$z = x + iy$$

وذلك بطريقة وحيدة حيث x و y حقيقيين

لنأخذ هذا المثال للحساب :

$$(2+3i)(5-7i) = 2\cdot 5 - 2\cdot 7i + 3i\cdot 5 - 3i\cdot 7i$$
$$= 10 - 14i + 15i - 21i^2$$
$$= 10 + i + 21$$
$$= 31 + i$$

وإذا كان $z = x + iy$ عدداً عقدياً فإن x يُسمى الجزء الحقيقي و y الجزء التخيلي لِـ z ونضع

$$x = \mathrm{Re}(z) \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

وإذا كان $Re(z) = 0$ فنقول عن z أنه تخيلي ونقول عن z أنه حقيقي إذا كان $Im(z) = 0$ (عندئذٍ فإن z يكون في الحلقة الجزئية $\mathbf{R}$ من الحلقة $\mathbf{C}$) .

4. العناصر القابلة للقلب في توسيع تربيعي

لتكن K حلقة تبديلية و d عنصراً من K ؛ نعتبر التوسيع التربيعي

$$L = K[\sqrt{d}]$$

الذي أنشأناه في الفقرة السابقة. وإذا اعتبرنا

$$z = x + wy \text{ ؛ } (x \text{ و } y \text{ في } K)$$

عنصراً من L ، فإن العنصر

$$\bar{z} = x - wy \tag{8}$$

يسمى مترافق z ، كما أن $N(z)$ المعرّف بما يلي :

$$N(z) = z\bar{z} = (x + wy)(x - wy) = x^2 - w^2y^2 = x^2 - dy^2 \tag{9}$$

يسمى نظيم z .

ومن أجل كل z' و z'' في L ، تكون لدينا العلاقتين

$$\overline{z' + z''} = \overline{z'} + \overline{z''} \tag{10}$$

$$\overline{z' z''} = \overline{z'} \cdot \overline{z''} \tag{11}$$

مما يمكننا من حساب مترافق مجموع وجداء عناصر من L .

إن أبسط طريقة لبرهان (10) و (11) هي الانطلاق من العلاقتين (2^{ter}) و (3^{ter}) من الفقرة 3، حيث نعوّض y' و y'' بنظيريهما دون تغيير x' و x'' .

وتشير العلاقة (11) إلى أن

$$N(z'z'') = N(z')\, N(z') \tag{12}$$

من أجل كل z' و z'' ؛ بالفعل ،

$$N(z'\, z'') = \overline{z'z''} \cdot z'z'' = \overline{z'} \cdot \overline{z''} \cdot z' \cdot z'' = \overline{z'} \cdot z'\ \overline{z''} z'' = N(z')\, N(z'')$$

وهذا ما أعلنّا. ونلاحظ أيضاً أن

$$N(1) = 1 \tag{13}$$

نظرية 1 - لتكن K حلقة تبديلية و d عنصراً من K و z عنصراً من الحلقة $K[\sqrt{d}]$. إنّ الشرط اللازم والكافي ليكون z قابلاً للقلب في $K[\sqrt{d}]$ هو أن يكون $N(z)$ قابلاً للقلب في K ؛ ويكون لدينا عندئذٍ

$$z^{-1} = N(z)^{-1} \cdot \overline{z} \tag{14}$$

البرهان : نفترض z قابلاً للقلب ؛ من العلاقة $z z^{-1} = 1$ ، واعتماداً على (12) و (13) فإننا نحصل على العلاقة

$$N(z)\, N(z^{-1}) = 1$$

ومنه نرى أن $N(z)$ قابل للقلب في الحلقة K .

ومن ناحية عكسية ، إذا كان $N(z)$ قابلاً للقلب في K ، فإن العلاقة

$$z\overline{z} = N(z)$$

تعطي

$$N(z)^{-1}\,\bar{z}\,z = 1$$

وهذه الأخيرة تعني أن z قابل للقلب وأن مقلوبه معرّف بالعلاقة (14) .

5. حالة الحقول التبديلية

بإمكاننا الآن برهان النتيجة التالية :

نظرية 2 - إذا كان d عنصراً من حقل تبديلي K ، فإن الخواص التالية متكافئة :

أ) الحلقة $K[\sqrt{d}]$ حقل

ب) d ليس مربع في K .

لبرهان أن أ) يستلزم ب) ، نفترض وجود x في K بحيث $x^2 = d$ ؛ من العلاقة $x^2 = w^2$ نرى أن $(x - w)(x + w) = 0$ ، ومنها يكون لدينا $x = w$ أو $x = -w$ ، وهذا مستحيل لأن العلاقة $x + wy = 0$ حيث x و y في K تؤدي بالضرورة إلى $x = y = 0$.

لنبرهن الآن أن ب) تستلزم أ) ؛ وليكن $z = x + wy$ عنصراً من $K[\sqrt{d}]$ غير معدوم ؛ ولبرهان كونه قابلاً للقلب . فإنه يكفي (نظرية 1) برهان كون $N(z)$ قابلاً للقلب في K . وبما أن K حقل ، فإن المسألة تعود إلى إثبات أن العلاقة $N(z) = 0$ تستلزم $z = 0$ ، أي :

$$x^2 - dy^2 = 0 \quad \text{تستلزم} \quad x = y = 0$$

فإذا كان $y \neq 0$ ، يكون y قابلاً للقلب في K وبالتالي يكون لدينا

$$d = (y^2)^{-1}\,x^2 = (y^{-1}\,x)^2$$

وهذا يناقض ما افترضناه : d غير مربع في K .

إذن $y = 0$ وبالتالي $x^2 = 0$ و $x = 0$ وهكذا ينتهي البرهان.

مثال 2 – إذا أخذنا $K = \mathbf{R}$ و $d = -1$ ، فإن حلقة الأعداد العقدية **C** تكون في الواقع حقلاً ؛ ونقول لأجل ذلك عن **C** أنه **حقل الأعداد العقدية**. وإذا كان

$$z = x + iy$$

عدداً عقدياً غير معدوم ، فإن مقلوبه يكون معرّفاً بالعلاقة (14)، وبما أن

$$N(z) = x^2 + y^2$$

فإن :

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

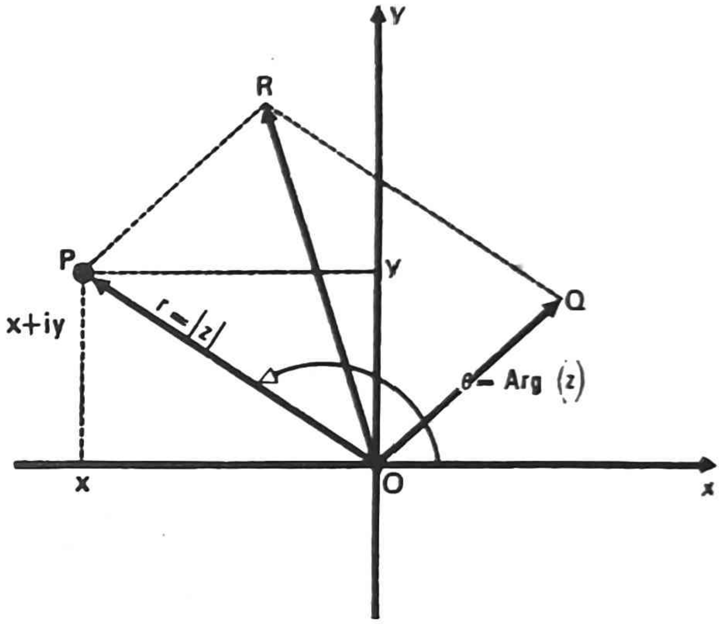
حيث لا يمكن للمخرج أن يكون معدوماً (حسب برهان النظرية 2) إلاّ إذا كان $x = y = 0$ أي $z = 0$.

مثال 3 – إن الحلقة $L = \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ هي في الواقع حقل تبديلي. ويمكن مطابقته مع حقل جزئي من **R** ؛ يمكن مقابلة كل عنصر $x + yw$ من L بالعدد الحقيقي $x + \sqrt{2}\,y$ ، ويكون التطبيق الذي نعرفه بهذه الطريقة متبايناً ومنسجماً مع قوانين التشكيل التي نعتبرها في الدراسة. ونحصل بهذه الوسيلة على الحقل الجزئي من **R** المعرّف في ف 8، مثال 6.

6. التمثيل الهندسي للأعداد العقدية

لنعتبر في المستوى، محوري إحداثيات متعامدين Ox و Oy ؛ إنه من الطبيعي مقابلة كل عدد عقدي $z = x + iy$ بالنقطة التي تكون إحداثياتها x و y. وعكسياً نقابل كل نقطة P في المستوى ذات إحداثيات x و y بالعدد العقدي $z = x + iy$ الذي يسمى عادة لاحقة النقطة P.

وهكذا نحصل على تقابل لمجموعة الأعداد العقدية **C** في مجموعة نقط المستوي (حيث اخترنا محوري إحداثيات الأمر الذي يسمح بمطابقة المستوي مع $\mathbf{R}^2$) .



إن «التمثيل الهندسي» هذا للأعداد العقدية يسمح بتأويل بسيط لجمع الأعداد العقدية : فإذا كانت P و Q نقطتين في المستوي وu و v لاحقتيهما ، فإن النقطة R ، ذات اللاحقة $v + u$ ، تكون معرّفة بالعلاقة

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

إذ أنه للحصول على مجموع شعاعين منطلقين من O ، فإنه يكفي جمع مركباتها بالنسبة لمحوري الإحداثيات Ox و Oy .

إذا كانت $z = x + iy$ لاحقة نقطة P ، فإن العدد

$$N(z) = x^2 + y^2$$

يكون معرّفاً بطبيعة الحال، بالعلاقة

$$N(z) = OP^2$$

وذلك حسب نظرية . هذا وإن المسافة بين P و O ، أي العدد

(15) $$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\ \bar{z}}$$

تسمى **القيمة المطلقة لِـ** z أو **مقياس** z ، ونرمز لها $|z|$؛ وفي كل الأحوال يكون $|z| \geq 0$ ، و $|z| = 0$ إذا وإذا فقط $z = 0$ ؛ وبالإضافة إلى ذلك ، تشير المتراجحات المعروفة ، بدراسة البيان ، إلى أن $|u + v| \leq |u| + |v|$؛ من أجل كل u و v في $\mathbb{C}$ ، ولدينا بصورة أعم

(16) $$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$$

مهما كانت الأعداد العقدية z_1 ، ... z_n ؛ وتعرَّف هذه النتيجة تحت اسم متراجحة المثلث .

نفترض $z \neq 0$ ؛ إن الزاوية

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}\ \overrightarrow{OP}}\right)$$

وهو عدد حقيقي بترديد 2π (ف 4 ، مثال 10) ، تسمى **عمدة** العدد العقدي $z \neq 0$ ونرمز لها عادة $\text{Arg}(z)$. ويشير البيان إلى أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد العقدي z ، يمكن تعريفهما بدلالة قيمة z المطلقة ، r وعمدته ، θ ، وذلك بالدستورين

(17) $$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

بحيث نحصل أيضاً على الكتابة

(18) $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ويسمى هذا الدستور : **التمثيل المثلثي** لـ z . ونشير من ناحية عكسية إلى أن العلاقة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $r > 0$ تؤدي إلى $|z| = r$ و $\theta = \text{Arg}(z)$؛ إذ تشير العلاقة (18) إلى أن الجزء الحقيقي يكون $x = r \cdot \cos\theta$ والجزء التخيلي $y = r\sin\theta$ ، وينتج عن ذلك $r^2 = x^2 + y^2$ ،

و $|z| = r$ ، إذ أن r موجب ؛ وإذا كانت θ' عمدة z ، فنحصل على $\cos\theta = \cos\theta'$ و $\sin\theta = \sin\theta'$ ، وبالتالي $\theta = \theta'$ بترديد 2π ، مما يبرهن ما أعلناه .

لنستنتج الآن ، اعتماداً على ما سبق ، الدستورين

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ ؛ } \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \tag{19}$$

والذين يسمحان بحساب مقياس وعمدة جداء أعداد عقدية ، ونكتب لأجل ذلك

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)$$

ومنها نحصل على

$$z_1 z_2 = r_1\, r_2(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)$$

وبما أن $r_1 r_2$ موجب ، فيكفي ، لإثبات النتيجة المطلوبة ، أن نبرهن العلاقة

$$(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \text{ ؛}$$

لكن ، اعتماداً على قواعد جداء الأعداد العقدية ، لدينا :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

وهذا ما نهدفه .

يمكن تعميم النتيجة السابقة على الشكل

$$\prod_{p=1}^{p=n} (\cos\theta_p + i \cdot \sin\theta_p) = \cos\theta + i\sin\theta;\ \theta = \sum_{p=1}^{p=n} \theta_p \tag{20}$$

ونحصل بصورة خاصة ، إذا كان $\theta_p = \alpha$ مهما كان p ، على **دستور دي موافر** الشهير .

$$(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^n = \cos(n\,\alpha) + i \cdot \sin(n\,\alpha) \qquad (21)$$

ملاحظة 2 – يسمح الدستوران :

$$\text{Arg}\,(z_1\, z_2) = \text{Arg}\,(z_1) + \text{Arg}\,(z_2) \text{ ؛ } |z_1\, z_2| = |z_1||z_2| \text{ ،}$$

بإعطاء تأويل «هندسي» لجداء الأعداد العقدية .

ليكن $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ ، $r \geq 0$ ،

عدداً عقدياً ، ليكن التطبيق الذي يرافق كل نقطة P ذات لاحقة u بالنقطة P' ذات اللاحقة zu ؛ إن هذا التحويل تشابه : أي جداء التحاكي الذي مركزه O ونسبته r مع الدوران حول O بزاوية θ .

كما أن العلاقتين

$$\text{Arg}\,(z^{-1}) = -\,\text{Arg}\,(z) \text{ ؛ } |z^{-1}| = |z|^{-1}$$

(الذين نحصل عليهما بوضع $z = z_1$ و $z_2 = z^{-1}$ في (19)) ، تشيران إلى أننا ننتقل من النقطة ذات اللاحقة $z \neq 0$ إلى النقطة ذات اللاحقة z^{-1} وذلك بواسطة تعاكس مركزه O وقوته 1 متبع بتناظر بالنسبة للمحور Oy .

كان غوس أول من استخدم هذه التأويلات الهندسية عام 1799 وذلك لبرهان نظرية دالمبارت – غوس (ف 33 رقم 2) هذا وإن الأعداد العقدية قد اكتشفت في القرن السادس عشر من طرف علماء إيطاليين .

7. دساتير جداء التوابع المثلثية

إن دستور دى موافر

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(nt) + i \cdot \sin(nt),$$

الذي حصلنا عليه من أجل كل عدد حقيقي t ، يسمح حساب $\cos(nt)$ و $\sin(nt)$ بدلالة $\cos t$ و $\sin t$. ولأجل ذلك، نكتب الطرف الأيسر على الشكل

$$\cos^n t + \binom{n}{1}\cos^{n-1} t \cdot i \cdot \sin t + \binom{n}{2}\cos^{n-2} t(i \cdot \sin t)^2 + \dots + (i \cdot \sin t)^n =$$

$$= \cos^n t + i \cdot \binom{n}{1}\cos^{n-1} t \cdot \sin t - \binom{n}{2}\cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t - i \cdot \binom{n}{3}\cos^{n-3} t \cdot \sin^3 t +$$

$$+ \binom{n}{4}\cos^{n-4} t \cdot \sin^4 t + i\binom{n}{5}\cos^{n-5} t \cdot \sin^5 t + \dots + i^n \cdot \sin^n t)$$

وبما أن الجزء الحقيقي في هذه العبارة يساوي $\cos(nt)$ والجزء التخيلي يساوي $\sin(nt)$ (حسب دستور دى موافر) ، فنحصل على

$$(22) \quad \cos(nt) = \cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t + \binom{n}{4}\cos^{n-4} t \cdot \sin^4 t - \dots$$

$$(23) \quad \sin(nt) = \binom{n}{1}\cos^{n-1} t \cdot \sin t - \binom{n}{3}\cos^{n-3} t \cdot \sin^3 t + $$
$$+ \binom{n}{5}\cos^{n-5} t \cdot \sin^5 t + \dots$$

ونلاحظ أن الطرفين الأخيرين يتعلقان بـ n ، إذ أن i^n حقيقي لما يكون n زوجياً وتخيلي إذا كان n فردياً. على سبيل المثال

$$\cos 4t = \cos^4 t - 6\cos^2 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t$$

$$\cos 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t \cdot \sin^2 t + 10\cos t \cdot \sin^4 t$$

هذا وأنه يمكن $\operatorname{tg}(nt)$ ، اعتماداً على (22) و (23) .

$$(24) \quad \operatorname{tg}(nt) = \frac{\sin(nt)}{\cos(nt)} =$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1} t \cdot \sin t - \binom{n}{3}\cos^{n-3} t \sin^3 t + \dots}{\cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t + \binom{n}{4}\cos^{n-4} t \cdot \sin^4 t - \dots}$$

وإذا قسمنا طرفي الكسر السابق على $\cos^n t$ فنحصل على

$$\operatorname{tg}(nt) = \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} t - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 t + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 t - \dots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 t + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 t - \dots}$$

مثلاً

$$\operatorname{tg}(5t) = \frac{5\operatorname{tg} t - 10\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{tg}^5 t}{1 - 10\operatorname{tg}^2 t + 5\operatorname{tg}^4 t}$$

لنطبق الآن الدستور التالي

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (25)$$

وهو صالح في كل حقل بمجرد أن يكون $q \neq 1$ ، ونأخذ $q = r^2$ حيث

$r = \cos t + i \cdot \sin t$ ؛

فنحصل من ناحية على

$$\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{r^{2n+2} - 1}{r^2 - 1} = \frac{r^{2n+1} - r^{-1}}{r - r^{-1}} = r^n \frac{r^{n+1} - r^{-n-1}}{r - r^{-1}}$$

ومن ناحية أخرى ، لدينا حسب دستور دى موافر

$$r^{n+1} = \cos(n+1)t + i \cdot \sin(n+1)t$$

$$r^{-1} = \cos t - i \cdot \sin t$$

$$r^{-n-1} = \cos(n+1)t - i \sin(n+1)t$$

وبالتالي يكون لدينا

وبتطبيق دستور دى موافر من جديد ، نحصل على

$$1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\cos(2kt) + i \cdot \sin(2kt)\right)$$

ومن الدستور (25)، نجد الدستورين

$$1 + \cos(2t) + \cos(4t) + \dots + \cos(2nt) = \cos(nt)\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$$

$$\sin 2t + \sin(4t) + \dots + \sin(2nt) = \sin(nt)\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$$

أو بتعبير آخر

(26) $$1 + \cos t + \cos(2t) + \dots + \cos(nt) = \cos\left(n\frac{t}{2}\right)\frac{\sin(n+1)^{t}/_{2}}{\sin {}^{t}/_{2}}$$

(27) $$\sin t + \sin(2t) + \dots + \sin(nt) = \sin\left(n\frac{t}{2}\right.\frac{\sin(n+1)^{t}/_{2}}{\sin {}^{t}/_{2}}$$

حيث نفترض $\sin\frac{t}{2} \neq 0$ أي أن t ليس من مضاعفات 2π.

المقاييس على حلقة

يعطي مفهوم المقياس على حلقة إطاراً عاماً ومجرداً لمعالجة المسائل «الخطية» بطرق جبرية بحتة. وتطرح هذه المسائل في كل فروع الرياضيات: نظرية الأعداد، الجبر الخطي التقليدي، الحساب الطنسوري، الأشكال التفاضلية، معادلات المشتقات الجزئية، المعادلات التكاملية، الهندسة الجبرية، التوابع التحليلية، الطوبولوجيا الجبرية...

هذا وإن بعض نتائج نظرية المقاييس على حلقة K تفترض بعض الشروط حول هذه الأخيرة؛ وعلى سبيل المثال نفترض في نظرية «البعد» أن K حقل.

أما النتائج البسيطة فإنها تكون محققة بالنسبة لكل حلقة K؛ ونتعرّض لهذه النتائج في هذا الباب (من ف 10 إلى ف 17). ويمكن للقارئ إن وجد الطريقة المتَّبعة كثيرة التجريد والتعميم، يمكنه أن يأخذ $K = \mathbf{R}$، حقل الأعداد الحقيقية، غير أن هذا الافتراض لايعطي تبسيطاً ملموساً للفصول المدروسة: إذا افترضنا أن $K = \mathbf{R}$ فإنه يمكن تجاهل الأمثلة 5، 6، 9، 10 والفقرة 4 من الفصل ف 10، والأمثلة 4، 5، 6، 11، من ف 11، والملاحظة 4 من ف 16، والمثال 2 من ف 17؛ ويظل الباقي كما هو بتعويض الحرف K بالحرف $\mathbf{R}$.

ف 10. المقاييس والفراغات الشعاعية

1. تعريف المقاييس على حلقة

لتكن K حلقة ؛ نسمي **مقياساً من اليسار على الحلقة** K ، الكائن المؤلف من مجموعة M ، وقانون تشكيل على M ، نرمز له بِـ $(x, y) \mapsto x + y$ ، وتطبيق $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ من المجموعة $K \times M$ في M ، وينبغي لهذه المعطيات أن تحقق الشروط التالية :

(M_1) : المجموعة M مزودة بقانون التشكيل $(x, y) \mapsto x + y$ زمرة تبديلية .

(M_2) : لدينا العلاقات

$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x) \; ; \; 1x = x \; ;$$
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \; ; \; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

من أجل كل x و y في M وكل λ و μ في K .

عند دراسة المقاييس ، نبداء بتحديد الحلقة K ونسميها **حلقة الأساس** ونسمي عناصرها **سلميات** (نرمز لها عادة بأحرف إغريقية) ؛ أما عناصر المقاييس على K فإنها تسمى **أشعة** (نرمز لها عادة بأحرف لاتينية ، يضع البعض سهماً فوقها ، لكن أغلب الرياضيين عدل عن ذلك منذ مدة طويلة) . هذا ويصعب التميز ، من الناحية الرياضية ، بين الأشعة والسلميات (وسنرى في المثال 1 أن السلميات هي أشعة خاصة . . .) ، والهدف من التمييز بين المفهومين هو مساعدة القارئ على تصور الأشكال الهندسية المألوفة .

إذا كان K حقلاً فإن كل مقياس من اليسار على K، يسمى **ففراغ شعاعي من اليسار على** K. ونقول عن كل فراغ شعاعي على $\mathbf{R}$ أنه **فراغ شعاعي حقيقي**، كما أن كل فراغ شعاعي على حقل الأعداد العقدية $\mathbf{C}$ يسمى **فراغ شعاعي عقدي**؛ ولهذين المفهومين أهمية كبرى في التحليل وفي الفيزياء؛ أما الفراغات الشعاعية على حقول كيفية، والمقاييس على حلقة $\mathbf{Z}$ (انظر المثال 5 أسفله) أو على «حلقة كثيرات الحدود» فإنها تلعب في بعض فروع الرياضيات دوراً أكثر أهمية من الفراغات الشعاعية الحقيقية أو العقدية. وعلى الرغم من أن الفيزيائيين لم يستخدموا بعد «لغة» نظرية المقاييس فإن المقاييس على حلقة غير تبديلية تستعمل في الفيزياء النظرية (التمثيلات الخطية لزمرة لورنتز Lorentz).

نشير إلى أن المتطابقات المذكورة في الشرط (M_2) من تعريف المقاييس تؤدي إلى العلاقتين

$\lambda 0 = 0$ من أجل كل $\lambda \in K$ و $0\,x = 0$ من أجل كل $x \in M$،

(حيث نرمز بـ0 للعنصر المعدوم في K وفي M). لنثبت الأولى؛ نلاحظ أن $\lambda 0 + \lambda x = \lambda(0 + x) = \lambda x$ مهما كان $x \in M$، ومنه فإن $\lambda 0 = \lambda x - \lambda x = 0$ كما أعلنا. أما العلاقة الثانية فهي ناتجة عن $x = (0 + 1)x = 0\,x + 1x$، بحيث يكون لدينا $0\,x = x - x = 0$.

نشير أخيراً إلى أننا نعرّف المقياس من اليمين على K كما يلي: هو الكائن المؤلف من زمرة جمعية M ومن تطبيق

$$(x, \lambda) \mapsto x\,\lambda$$

من $M \times K$ في M، بحيث تتحقق الشروط التالية:

$$x1 = x \;;\; (x\,\lambda)\mu = x(\lambda\,\mu)$$

$$x(\lambda + \mu) = x\,\lambda + x\,\mu \;;\; (x + y)\lambda = x\,\lambda + y\,\lambda\,.$$

هذا وإن التميز بين المقياس من اليسار والمقياس من اليمين لا يكون مفيداً إلا إذا كانت الحلقة غير تبديلية. وفي دراستنا هذه سنستعمل أحياناً لغة المقاييس من اليسار وأحياناً أخرى لغة المقاييس من اليمين.

لنأخذ الآن بعض الأمثلة الهـامة حول المقاييس والفراغات الشعاعية.

2. أمثلة حول المقاييس

مثال 1 - من أجل كل حلقة K وكل عدد طبيعي $n \geq 1$، فإنه يمكن أن نعتبر المجموعة $K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ مرة}}$ مقياس من اليسـار على K، وذلك عندما نضع التعريف التالي:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_n) ;$$

وينتج الشرط (M_1) عن ف 7، رقم 2 (الجداء المباشر في الزمر)، ويمكن للقارئ إثبات العلاقات المذكورة في (M_2) اعتماداً على تعريف الحلقات.

وفي كل ما يلي، عندما نتحدث عن المقياس K^n على K من اليسـار فإننا نعني بذلك المقياس المعرّف آنفاً.

وإذا كان $n = 1$ فإن التعريف السـابق يجعل K مقياسـاً على K من اليسـار (وهذا ما يثبت أن «السلميات» هي أيضـاً «أشعة» . . .) .

يمكننا بطبيعة الحال أن نعتبر K^n مقياسـاً على K من اليمين؛ ويكفي للحصول على ذلك أن نعرّف الجمع كما فعلنا آنفاً وأن نضع

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)\lambda = (\xi_1\lambda, \ldots, \xi_n\lambda)$$

وسنرى أننا نعتبر المقياس K^n من اليمين عند دراسة المعادلات الخطية (لكن، كما هو بديهي، لا فائدة في التمييز بين المفهومين إذا كانت الحلقة K تبديلية) .

مثال 2 - نأخذ $K = \mathbf{R}$، حقل الأعداد الحقيقية و M مجموعة الأشعة العادية المنطلقة من النقطة O في الفراغ العادي؛ نعرّف مجموع شعاعين بالطريقة المـألوفة (قاعدة متوازي الضلعين)، ونعرف جداء شعاع x منطلق

من O مع عدد حقيقي λ بالشعاع λx الذي نحصل عليه عندما نؤثر على x بتحاك مركزه O ونسبته λ؛ نحصل عندئذٍ على فراغ شعاعي حقيقي.

ينبغي أن نثبت بطبيعة الحال أن الشروط (M_1) و(M_2) محققة هنا، ولـكن القيام بهذا العمل لا يكون إلاّ في إطار الهندسة الابتدائية (إذ اننا لم نعط أي تعريف دقيق لمفهوم «الشعاع» المـألوف).

وهذا المثال هو من جملة الأمثلة التي أدت إلى إدخال مفهومي الفراغ الشعاعي والمقياس بصورة عامة، وهذا ما يفسر أيضاً السبب الذي يجعلنا نستعمل كلمة «شعاع» لتعيين عناصر مقياس ما.

مثال 3 - نعتبر في المستوي المزوّد بمحوري إحداثيات Ox, Oy، المجموعة M المؤلفة من الأشعة المنطلقة من O والتي تكون مركباتها في المحورين المذكورين أعداد ناطقة؛ من الواضح أنه إذا كان $x \in M$ و $y \in M$ فإن $x + y \in M$، وإذا كان $x \in M$ و $\lambda \in \mathbf{Q}$ فإن $\lambda x \in M$. وهذا يجعل M فراغاً شعاعياً على $\mathbf{Q}$.

مثال 4 - لتكن K حلقة وM مقياساً على K من اليسـار (مثلاً $M = K$)، ولتكن X مجموعة ما. لتكن E مجموعة كل التطبيقات

$$f : X \to M\,;$$

نهدف إلى جعل E مقياساً من اليسـار على K. وللحصول على ذلك ينبغي أن نعرّف $f + g$ مجموع تطبيقين من X في M: ويكون هذا هو التابع $f(x) + g(x)$ الذي نحصل على قيمته في كل $x \in X$ بجمع (في M) قيمة f مع قيمة g في x؛ وينبغي أن نعرّف λf جداء عنصر $\lambda \in K$ مع تطبيق f من X في M: وهو التابع $\lambda f(x)$، الذي نحصل على قيمته في كل $x \in X$ بضرب $f(x)$ بـλ.

وكتمرين للقارئ نترك له أن يثبت بالتفصيل صحة (M_1) و(M_2) المذكورين في تعريف المقاييس.

ونشير إلى أنه إذا كان $K = M$ و$X = \{1, 2, \dots, n\}$، فإن كل تطبيق $f : x \to M$ يكون عبارة عن متتالية $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ من عناصر K حيث

$\xi_1 = f(1)$ ، ... ، $\xi_n = f(n)$ ؛ ونحصل عندئذٍ على المقياس K^n الذي تعرضنا له في المثال 1.

مثال 5 - لنبرهن الآن على أن كل زمرة تبديلية G تعتبر مقياساً على $\mathbf{Z}$ من اليسار. ولهذه الغاية نكتب قانون G جمعاً، الأمر الذي يسمح بتعريف مجموع عنصرين من G ، بحيث يكون (M_1) بديهياً. بقي تعريف nx ، جداء عنصر $n \in \mathbf{Z}$ مع عنصر $x \in G$ ، ونقوم بذلك كما فعلنا في ف 7، أي أننا نضع

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ مرة}} & 1 \leq n \text{ إذا كان} \\ 0 & n = 0 \text{ إذا كان} \\ (-n)(-x) & n \leq -1 \text{ إذا كان} \end{cases}$$

ويقتصر عندئذٍ الشرط (M_2) على قواعد الحساب التي أثبتناها في المثال 9 والملاحظة 1 من ف 7.

إذا كان قانون الزمرة G ضرباً فإنه ينبغي تعريف «مجموع» عنصرين x و y من G بـ xy ، و«جداء» عدد صحيح n مع عنصر $x \in G$ بـ x^n ؛ والفرق الوحيد بين هذه الحالة والحالة السابقة يكمن في الرموز المستعملة.

وأخيراً يمكن التأكد بسهولة من أن كل مقياس على $\mathbf{Z}$ يحصل عليه انطلاقاً من زمرة جمعية بنفس الطريقة التي اتبعناها.

ويشير هذا المثال إلى أن نظرية المقاييس تحوي، من جملة ما تحويه، نظرية الزمر التبديلية، وهذا غير صحيح بالنسبة لنظرية الفراغات الشعاعية.

مثال 6 - لتكن K حلقة جزئية من حلقة L ؛ يمكننا عندئذٍ أن نعتبر L مقياساً يسارياً على K ، حيث نعرف الجمع والضرب في هذا المقياس بعملية الجمع وعملية الضرب في الحلقة L .

وعلى سبيل المثال يمكن أن نعتبر أن $\mathbf{R}$ فراغ شعاعي على $\mathbf{Q}$ وأن $\mathbf{C}$ فراغ شعاعي على $\mathbf{R}$.

مثال 7 - لنأخذ $K = \mathbf{R}$ ، ونعتبر المجموعة M المؤلفة من كل التطبيقات

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

(التوابع الحقيقية ذات متحول حقيقي) المتسمرة في كل نقطة. ونبرهن في التحليل أنه إذا كان $f \in M$ و $g \in M$ فإن $f + g \in M$ ، وأنه إذا كان $f \in M$ و $\lambda \in \mathbf{R}$ فإن $\lambda f \in M$. (يكون تعريف $f + g$ و λf كما أعطيناه في المثال 4 السابق).

ومن الواضح أن الثلاثية المؤلفة من المجموعة M ، والتطبيق $(f, g) \mapsto f + g$ من $M \times M$ في M ، والتطبيق $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ من $\mathbf{R} \times M$ في M ، هي فراغ شعاعي حقيقي.

وهذا المثال (وهو سبب إدخال الفراغات الشعاعية في التحليل) يقبل أشكالاً متنوعة؛ وعوضاً عن افتراض أن التوابع f التي اعتبرناها مستمرة في كل نقطة، يمكن افتراضها مستمرة في نقطة معينة، أو قابلة للاشتقاق في نقطة معينة، أو قابلة لمشتق من الدرجة الثانية في كل نقطة، الخ...

3. المقاييس الجزئية، الفراغات الشعاعية الجزئية

ليكن M مقياساً من اليسار على حلقة K. نسمي **مقياساً جزئياً** من M كل جزء M' من M يحقق الشرطين التاليين

(i) M' زمرة جزئية من الزمرة الجمعية M ؛

(ii) العلاقتان $x \in M'$ و $\lambda \in K$ تستلزمان $\lambda x \in M'$.

لأجل إثبات أن جزء M' من M مقياس جزئي فإنه ينبغي التأكد من أن M' غير خالية (نثبت عملياً أن $0 \in M'$) ، وأنه يكون لدينا

$$\lambda x + \mu y \in M' \text{ من أجل كل } x, y \in M \text{ و } \lambda, \mu \in K.$$

من البديهي أن هذا الشرط لازم. لنفترض عكسياً أنه محقق؛ لنأخذ $\mu = 0$ ، نحصل عندئذ على الشرط (ii) السابق؛ وللحصول على (i) فإنه يكفي أن نأخذ $\lambda = 1$ و $\mu = -1$ وأن نلاحظ أنه لدينا في كل مقياس

$(-1)x = -x$ مهما كان $x \in M$

(بالفعل : $(-1)x + x = (-1)x + (+1)x = (-1+1)x = Ox = 0$)

كل مقياس M يحوي مقياسين جزئيين على الأقل، وهما المقياس M ذاته والمقياس المقتصر على الشعاع O.

ليكن M' مقياساً جزئياً من مقياس M ؛ نرى من الشرط (i) أن M' زمرة جمعية ؛ كما أن الشرط (ii) يسمح بتعريف تطبيق $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ من $K \times M'$ في M' ، يحقق علاقات الشرط (M_2) ، نظراً لأن هذه الأخيرة محققة في M . ويمكن بالتالي اعتبار M' مقياس على K من اليسار.

إذا كان K حقلاً فإن المقياس الجزئي يسمى **فراغ شعاعي جزئي**.

مثال 8 - نفترض أن M هو الفراغ الشعاعي الحقيقي المعرّف في المثال 2 السابق؛ عندئذٍ (وبالإضافة إلى $\{0\}$ و M ذاته) يوجد صنفان من الفراغات الشعاعية الجزئية : أ) مجموعة كل الأشعة المنطلقة من O والمحمولة بمستقيم مار بالنقطة O ب) مجموعة الأشعة المنطلقة من O والمحتواة في مستوى يحوي النقطة O . ويمكن أن نرى بسهولة أن كل الفراغات الشعاعية الجزئية من M هي من الصنفين المذكورين.

مثال 9 - لتكن K حلقة نعتبرها مقياساً على K من اليسار (مثال 1) ؛ إن مقاييسها الجزئية هي الأجزاء $I \subset K$ ، الغير خالية والتي تحقق

$ux + vy \in I$ من أجل كل x و y في I و u و v في K .

وهي بالتالي مثاليات K من اليسار المعرّفة في ف 8، رقم 6.

مثال 10 - لتكن G زمرة جمعية تبديلية، ونعتبرها مقياساً على Z (مثال 5) ؛ إن المقاييس الجزئية من G هي زمرها الجزئية إذ أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $nx \in H$ مهما كان $n \in Z$ و $x \in H$.

إن النتيجة التالية تكون مفيدة أكثر في كثير من الأحيان.

نظرية 1 - ليكن L مقياساً على حلقة و $(M_i)_{i\in I}$ جماعة من المقاييس الجزئية من L . إن تقاطع الجماعة $(M)_{i\in I}$ يكون عندئذٍ مقياساً جزئياً من L . ولأجل أن يكون إتحاد الجماعة $(M)_{i\in I}$ مقياساً جزئياً من L . فإنه يكفي أن يتحقق الشرط التالي : مهما كان $i\in I$ و $j\in I$ فإنه يوجد $k\in I$ بحيث $M_i \subset M_k$ و $M_j \subset M_k$.

إن البرهان على هذه النتيجة يشابه تماماً البرهان على النظرية 1 من ف 7 ، ونترك للقارئ كتابة هذا البرهان بكل تفصيل.

ومن البديهي في الحالة العامة أن اتحاد مقاييس جزئية ليس مقياساً جزئياً : يكفي أن نعتبر (مثال 8) مستقيمين مختلفين يمران من النقطة 0 ، ونلاحظ أن اتحادهما لا يعرّف مستوى . . .

4. المقاييس من اليمين والمقاييس من اليسار(*)

لتكن K حلقة . نهدف تعريف حلقة جديدة تسمى الحلقة المقابلة لِـ K ونرمز لها بِـ $K°$ ؛ ونثبت بعد ذلك أن المقاييس على K من اليمين هي المقاييس على $K°$ من اليسار .

لنرى الآن كيف يمكن إنشاء $K°$ ؛ ينبغي أن يكون لدينا مجموعة وقانونا تشكيل عليها، قانون «جمع» وقانون «ضرب» . إن المجموعة $K°$ هي بالتعريف المجموعة K (K و $K°$ لهما نفس العناصر) ، وقانون «الجمع» على $K°$ يكون هو قانون الجمع على K (نحصل على نفس القمية $x+y$ سواء قمنا بعملية الجمع في K أو في $K°$) . أما قانون الضرب فنعرّفه على $K°$ كما يلي $(x, y) \mapsto yx$ وإذا رمزنا لهذا القانون بِـ * فإننا نحصل على

$$x * y = yx$$

(*) يمكن إهمال هذه الفقرة في قراءة أولى ؛ ولن نكون بحاجة لها إلاّ في نهاية ف 16 ، ويمكن للقارئ المبتدئ أن يفترض عندئذٍ أن K تبديلية .

ومن الواضح أن K° مزودة بقانون الجمع والقانون * هي حلقة ؛ وعلى سبيل المثال فإن الدستور

$$(x+y)*z = x*z + y*z$$

يعني العلاقة $z(x+y) = zx + zy$ في الحلقة K . . .

من الواضح أن الحلقة K° هي الحلقة K إذا كانت هذه الأخيرة تبديلية ، ولافائدة من إنشاء K° عندئذٍ .

نعتبر الآن مقياساً M على K من اليمين . لنعرّف تطبيقاً

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda * x$$

من $K^\circ \times M$ في M ، وذلك بوضع :

$\lambda * x = x\lambda$ مهما كان $x \in M$ و $\lambda \in K$.

وبواسطة هذا التعريف تصبح الزمرة الجمعية M مقياساً على K° من اليسار . وبالفعل ، لدينا

$$\lambda*(x+y) = (x+y)\lambda = x\lambda + y\lambda = \lambda*x + \lambda*y$$
$$(\lambda+\mu)*x = x(\lambda+\mu) = x\lambda + x\mu = \lambda*x + \mu*x$$
$$\lambda*(\mu*x) = (\mu*x)\lambda = (x\mu)\lambda = (\mu\lambda)*x = (\lambda*\mu)*x$$
$$1*x = x\,1 = x \text{ ،}$$

وهذا يثبت النتيجة المعلنة .

إن إنشاء الحلقة K° والدراسة التي تلتها يوضحان أن كل نتيجة محققة من أجل المقاييس من اليمين تكون أيضاً محققة من أجل المقاييس من اليسار (والعكس أيضاً) : يكفي الانتقال من الحلقة الأساسية إلى الحلقة المقابلة لها . وهكذا ، إذا كانت الحلقة الأساسية تبديلية ، فإنه يمكن وضع السلميات على يمين الأشعة أو على يسارها على حد سواء ؛ وكل المسألة هي مجرد اصطلاح .

ف 11. العلاقات الخطية في مقياس

1. العبارات الخطية

ليكن M مقياساً على حلقة K من اليسار، و a_1 ، a_2 ، ... ، a_n عناصر من M ، نسمي **عبارة خطية** في a_1 ، a_2 ، ... ، a_n كل شعاع $x \in M$ يحقق الخاصة التالية : توجد سلميات ξ_1 ، ... ، ξ_n من K بحيث يكون لدينا

$$x = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$$

ونحصل طبعاً على مفهوم مماثل بالنسبة للمقاييس من اليمين.

مثال 1 - نعتبر الأشعة التالية في K^n (ف 10 مثال 1) :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \text{ ؛}$$

ولدينا بصورة واضحة

$$\xi_1 e_1 = (\xi_1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\xi_2 e_2 = (0, \xi_2, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\xi_n e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, \xi_n)$$

وبالجمع نحصل على

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1)$$

أي أن كل عنصر من K^n هو عبارة خطية في e_1 ، … ، e_n ؛ ولدينا في الواقع نتيجة أدق : إذا اعتبرنا شعاعاً $x \in K^n$ ما ، فإنه توجد جماعة وحيدة من السلميات ξ_1 ، … ξ_n . بحيث

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n .$$

مثال 2 – نعتبر المقياس من اليمين K^p ، حيث p عدداً صحيحاً ≥ 1 ولتكن

$$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{p1})$$
$$a_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{p2})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{pn})$$

عناصراً من هذا المقياس . ليكن

$$b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$$

عنصراً من K^p ؛ عندئذٍ فإن العلاقة

$$b = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n \tag{2}$$

تكافئ الجملة التالية :

$$\begin{cases} \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \dots + \alpha_{1n} \xi_n = \beta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1} \xi_1 + \alpha_{p2} \xi_2 + \dots + \alpha_{pn} \xi_n = \beta_p \end{cases} \tag{3}$$

وهي جملة p معادلات خطية لِـ n مجاهيل ξ_1 ، … ، ξ_n . فعلاً لدينا

$$a_1 \xi_1 = (\alpha_{11} \xi_1, \dots, \alpha_{p1} \xi_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n \xi_n = (\alpha_{1n} \xi_n, \dots, \alpha_{pn} \xi_n) ;$$

وهكذا فإن الأطراف اليسرى للعلاقات (3) هي مركبات (*) الطرف الأيمن للعلاقة (2) .

(*) إن السلميات ξ_1 ، … ، ξ_n تسمى مركبات الشعاع $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K_n$ ؛ انظر المثال 12 ، أسفله .

وهذا المثال هو نقطة انطلاق النظرية «الهندسية» لجمل المعادلات الخطية .

نظرية 1 - ليكن M مقياساً على K من اليسار و a_1 ، ... ، a_n عناصرا من M ولتكن M' مجموعة العبارات الخطية في a_1 ، ... ، a_n ؛ يكون عندئذٍ M' هو أصغر مقياس جزئي من M يحتوي على a_1 ، ... ، a_n .

في البداية تشير العلاقة

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n$$

والعلاقات المماثلة بالنسبة لِـ a_2 ، ... ، a_n إلى أن M' يحوي a_1 ، ... ، a_n . ومن جهة أخرى ، إذا كان مقياس جزئي من M يحوي a_1 ، ... ، a_n فإنه يحوي أيضاً $\xi_1 a_1$ ، ... ، $\xi_n a_n$ من أجل كل $\xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_n \in K$ ، وبالتالي فهو يحوي $\xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$ ؛ وهكذا إذا كان مقياس جزئي من M يحوي الأشعة $a_i, 1 \leq i \leq n$ فإنه يحوي أيضاً M' . بقي لنا ، لإتمام البرهان ، أن نثبت أن M' مقياس جزئي من M . لنعتبر

$$y = \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_n a_n \quad \text{و} \quad x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$$

عنصرين من M' ، ونحصل بعد حساب بسيط على

$$\lambda x + \mu y = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$$

حيث

$$\xi_n = \lambda\xi_n + \mu\eta_n \text{ ، ... ، } \xi_1 = \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 \text{ ،}$$

بحيث يكون لدينا $\lambda x + \mu y \in M'$ من أجل كل $\lambda \in K$ و $\mu \in K$ ، وبهذا ينتهي البرهان .

إن المقياس الجزئي M' المعرّف آنفاً يسمى المقياس الجزئي من M والمولد عن a_1 ، ... ، a_n ؛ وإذا كان $K = Z$ ، بحيث يكون M عبارة عن زمرة تبديلية قانونها الجمع ، فإن M' هي الزمرة الجزئية من M والمولدة عن a_1 ، ... ، a_n .

2. المقاييس من صنف منته

ليكن M مقياساً على K من اليسار و M' مقياساً جزئياً من M ؛ نقول عن M' أنه من صنف منته إذا وجدت أشعة $a_1 ..., a_n \in M'$ عددها منتهياً، بحيث يكون M' مولداً عنها، ونقول عندئذٍ أن a_1 ، ... ، a_n تؤلف جماعة مولدات لِـ M' .

ويمكن، بصفة خاصة، أن نطبق هذا التعريف على المقياس M ذاته، ونقول عن مقياس ما أنه من صنف منته إذا كان يحوي أشعة a_1 ، ... ، a_n عددها منتهياً بحيث يكون كل $x \in M$ عبارة خطية في a_1 ، ... ، a_n .

إذا كانت الحلقة الأساسية K حقلاً فإن المقياس من صنف منته يسمى **فراغ شعاعي منتهي البعد.**

مثال 3 - يشير المثال 1 إلى أن K^n ، مقياس على K من صنف منته.

مثال 4 - إذا أخذنا $K = \mathbf{Z}$ فإن مفهوم المقياس من صنف منته يكون مفهوم الزمرة (التبديلية) من صنف منته (ف 7، رقم 4).

مثال 5 - إذا اعتبرنا $\mathbf{Q}$ مقياساً على $\mathbf{Z}$ فإنه ليس من صنف منته (ف 7، مثال 10) ؛ وإذا اعتبرنا $\mathbf{Q}$ فراغاً شعاعياً على $\mathbf{Q}$ فإنه يكون من صنف منته (أو منته البعد)، نظراً للمثال 3 السابق حيث نأخذ $K = \mathbf{Q}$ و $n = 1$.

مثال 6 - لتكن K حلقة ؛ إن المقاييس الجزئية من صنف منته في K (حيث نعتبر K مقياساً على نفسها) هي المثاليات اليسارية I من K (ف 10، مثال 9) التي تحقق الخاصة التالية : توجد جماعة منتهية a_1 ، ... ، a_n ، من عناصر I ، بحيث يمكن كتابة كل $x \in I$ على الشكل

$$x = u_1 a_1 + ... + u_n a_n$$

من أجل اختيار مناسب لِـ u_1 ، ... ، u_n من K . وكل مثالي من هذا النوع يسمى مثالي من اليسار ومن صنف منته من الحلقة K . من الواضح

أن كل مثالي رئيسي من K هو من صنف منته، لكن العكس غير صحيح بصفة عامة.

إذا اعتبرنا عناصراً a_1، a_2، ...، a_n من K، فإن عناصر K التي تكتب على الشكل $u_1 a_1 + ... + u_n a_n$ تؤلف مجموعة تسمى المثالي من اليسار المولد عن a_1، ...، a_n في K (وهي المقياس الجزئي من K والمولد عن a_1، ...، a_n).

مثال 7 - إن الفراغات الشعاعية التي تعرضنا لها في ف 10، مثال 7 ليست منتهية البعد.

3. العلاقات الخطية

ليكن M مقياساً على K من اليسار و a_1، ...، a_n عناصراً من M ولتكن x عبارة خطية في هذه الأشعة. لنعتبر طريقتين لكتابة x على شكل عبارة خطية في الأشعة المذكورة وليكن

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_n a_n = \eta_1 a_1 + ... + \eta_n a_n \text{ ؛}$$

وبعملية طرح نحصل على العلاقة

$$(\xi_1 - \eta_1)a_1 + ... + (\xi_n - \eta_n)a_n = 0$$

وهذا ما يبرر إدخال المفاهيم التالية:

نسمي **علاقة خطية** بين الأشعة a_1، ...، a_n كل عنصر $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ من K^n بحيث يكون لدينا

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$$

وتسمى العلاقة $(0, ..., 0)$ **علاقة تافهة**. ونقول أخيراً عن الجماعة a_1، ...، a_n، أنها مستقلة خطياً أو أنها **جماعة حرّة** إذا لم توجد أي علاقة خطية غير تافهة بين a_1، ...، a_n.

إن قولنا كون الجماعة a_1 ، ... ، a_n مستقلة خطيًا يعني أن العلاقة $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$ تستلزم $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ ؛ كما أن قولنا أنها غير مستقلة خطياً (نقول عندئذٍ أنها **مرتبطة**) يعني وجود سلميات λ_1 ، ... ، λ_n غير معدومة كلياً بحيث يكون لدينا

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0 .$$

إذا كانت لدينا أشعة a_1 ، ... ، a_n مستقلة خطياً فهي حتماً مختلفة مثنى مثنى ، إذ لو افترضنا مثلاً أن $a_1 = a_2$ فإن $(1, -1, 0, ..., 0)$ تكون علاقة خطية غير تافهة بين الأشعة a_1 ، ... ، a_n . ومع ذلك فإنه لا يكفي أن تكون الأشعة a_i مختلفة مثنى مثنى حتى تكون مستقلة خطياً .

إن الطريقة المتبعة لإدخال مفهوم الاستقلال الخطي تجعل النتيجة التالية واضحة :

نظرية 2 - لتكن a_1 ، ... ، a_n عناصراً من M ، حيث M مقياس من اليسار على K ، وليكن x عبارة خطية في الأشعة a_1 ، ... ، a_n . إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان :

أ) يوجد $(\xi_1, ..., \xi_n)$ في K^n وحيد بحيث

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_n a_n$$

ب) الأشعة a_1 ، . . . ، a_n مستقلة خطياً .

بالفعل ، يكفي أن نلاحظ ما يلي : إذا كان $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ علاقة خطية ما ، بين a_1 ، ... ، a_n فإن $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$ ، وبالتالي

$$\xi_1 a_1 + ... + \xi_n a_n = (\xi_1 + \lambda_1)a_1 + ... + (\xi_n + \lambda_n)a_n ،$$

ومن البديهي أن هذه الخاصية تميز العلاقات الخطية بين الأشعة المعطاة $a_1 a_n$.

مثال 8 - نعتبر في الفراغ K^n الأشعة e_1 ، ... ، e_n التي تعرضنا لها بالمثال 1 ؛ من الواضح أنها مستقلة خطياً .

مثال 9 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونعتبر الفراغ الشعاعي M المؤلف من الأشعة التي لها نقطة انطلاق معطاة O في الفراغ العادي (ف 10، مثال 2). إذا كانت a_1، ...، a_n أشعة من M، فإنها تكون مستقلة خطياً إذا وإذا فقط: (1) إذا كانت غير معدومة في الحالة $n = 1$، (2) ألاّ تكون محمولة على نفس المستقيم في الحالة $n = 2$ (3) ألاّ تكون محمولة على نفس المستوي في الحالة $n = 3$. أما في الحالات $n \geq 4$ فإن الأشعة مرتبطة حتماً.

مثال 10 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونعتبر الفراغ الشعاعي M المؤلف من كل التطبيقات $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ف 10، مثال 4 حيث نأخذ $X = M = K = \mathbf{R}$)؛ لتكن f_1، ...، f_n أشعة من M، أي توابعاً لمتحول حقيقي t، وتأخذ قيماً حقيقية. من أجل $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$ نعرّف التابع $f = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$ بالدستور:

$$f(t) = \lambda_1 f_1(t) + ... + \lambda_n f_n(t)$$

من أجل كل $t \in \mathbf{R}$. وبالتالي فإن كل علاقة خطية بين f_1، ...، f_n تكون متتالية $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ بحيث يكون لدينا

$\lambda_1 f_1(t) + ... + \lambda_n f_n(t) = 0$ من أجل كل $t \in \mathbf{R}$.

لنعتبر مثلاً التوابع التالية: 1، t، t^2، . . .، t^n؛ إن كل علاقة خطية بين هذه التوابع هي جملة من الأعداد الحقيقية c، c_1، ...، c_n بحيث

$$c_0 + c_1 t + ... + c_n t^n = 0$$

من أجل كل $t \in \mathbf{R}$. وسنرى في ما بعد، عند دراسة جذور المعادلات الجبرية، أن العلاقة السابقة تستلزم $c_0 = c_1 = ... = c_n = 0$، بحيث تكون التوابع $1, t$، ...، t^n مستقلة خطياً باعتبارها عناصراً من الفراغ الشعاعي الحقيقي M.

مثال 11 - بما أن $\mathbf{Q}$ حقل جزئي من $\mathbf{C}$، فإنه يمكن اعتبار $\mathbf{C}$ فراغ شعاعي على $\mathbf{Q}$ (ف 10، مثال 6). من أجل قيمة $z \in \mathbf{C}$ نعتبر القوى المتتالية 1، z، ...، z^n؛ وقولنا أنه توجد علاقة خطية غير تافهة بين العناصر

الـ$(n+1)$ المذكورة («أمثال» العلاقة في $\mathbf{Q}$) يعني وجود أعداد ناطقة c_0، c_1، ...، c_n غير معدومة كلياً بحيث تحقق z المعادلة

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n = 0$$

وإذا تحقق ذلك من أجل إحدى قيم n على الأقل فإننا نقول عن z أنه **عدد جبري**(*). وإذا لم يتحقق ذلك (أي أن z لا تحقق أية معادلة جبرية غير تافهة بأمثال في $\mathbf{Q}$) فإننا نقول عن z أنه عدد **متصاعد**، وهذا هو حال العدد π ($\pi = 3{,}14159 \dots$).

4. المقاييس الحرّة، الأسس

ليكن M مقياساً على حلقة K من اليسار؛ نقول عن M أنه حرّ من صنف منته إذا وجدت عناصر a_1، ...، a_n من M، عددها منته، مستقلة خطياً ومولدة لِـ M. ونقول عندئذٍ أن a_1، ...، a_n تشكل أساساً لِـ M (وهكذا فإن الأساس هو جملة منتهية من المولدات المستقلة خطياً).

لتكن a_1، ...، a_n عناصراً من M، حيث M مقياس على K من اليسار؛ إن القول أن هذه الجماعة تولد M يعني أن كل $x \in M$ يحقق علاقة

$$x = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$$

من أجل على الأقل $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$؛ وقولنا، من جهة أخرى أن الجماعة a_1، ...، a_n مستقلة خطياً، يعني أن كل $M \ni x$ يحقق علاقة من النوع المذكور من أجل عنصر من K^n على الأكثر.

وبالتالي فإن الأشعة a_1، . . . ، a_n تُشكل أساساً لِـ M إذا وإذا فقط تحقق الشرط التالي: من أجل كل $x \in M$، فإنه يوجد عنصراً $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ وحيد، بحيث

(*) نذكّر ما سبق أن أعلناه في ف 5، رقم 8، أن مفهوم العدد الجبري المعرّف هنا ليست له أية صلة بما يعرف تحت هذه التسمية في التعليم الثانوي (وهو مفهوم العدد الحقيقي).
يمكن أن نبرهن أن الأعداد الجبرية تؤلف حقلاً جزئياً من الحقل $\mathbf{C}$ (ف 26، رقم 2)؛ وكانت دراسة هذه الأعداد في القرن التاسع عشر هي نقطة انطلاق الجبر الحديث (وقد كان غوس وكومر وجاكوبي وديركلي وديدكند وكرونيكر وهيلبرت وخاصة غالوا هم أهم من درس الموضوع المذكور).

$$x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n \text{ ؛}$$

ونقول عن السلميات ξ_1 ، … ، ξ_n ، أنها إحداثيات أو مركبات x بالنسبة للأساس a_1 ، … ، a_n المتعلق بـ M .

نرى مما سبق أن إحداثيات x هي توابع لـ x ، تأخذ قيمها في K ؛ لنرمز لها بـ f_1 ، … ، f_n ، بحيث يكون لدينا

$$x = f_1(x)a_1 + \ldots + f_n(x)a_n$$

من أجل كل $x \in M$. نقول عن التوابع

$$f_i : M \to K$$

أنها توابع إحداثيات المقياس M بالنسبة للأساس a_1 ، … ، a_n وتكون لدينا العلاقات

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } i = j \text{ ،} \\ 0 & \text{إذا كان } i \neq j \text{ ،} \end{cases}$$

إذ إن العلاقة :

$$a_j = 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_{j-1} + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \ldots + 0 \cdot a_n$$

تسمح مباشرة بحساب إحداثيات الشعاع a_j بالنسبة للأساس المذكور.

ومن جهة أخرى لدينا المطابقات التالية :

$$f_i(x + y) = f_i(x) + f_i(y) \text{ ، } f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x) \text{ ؛}$$

إذ أنه لو جمعنا العلاقتين :

$$x = f_1(x) a_1 + \ldots + f_n(x) a_n \text{ ، } y = f_1(y) a_1 + \ldots + f_n(y) a_n$$

فإننا نحصل على

$$x + y = [f_1(x) + f_1(y)] a_1 + \ldots + [f_n(x) + f_n(y)] a_n \text{ ،}$$

وهذا يثبت أن إحداثيات الشعاع $x + y$ هي السلميات $f_i(x) + f_i(y)$. وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على العلاقة الثانية.

وهكذا إذا أردنا جمع شعاعين فإننا نجمع مركباتهما المتعلقة بنفس المرتبة، وإذا أردنا ضرب شعاع بسلّمي فإننا نضرب كل مركباته بذلك السلّمي.

مثال 12 - إن المقياس K^n (على K من اليسار) حرّ ومن صنف منته، ويشير المثال 1 إلى أن الأشعة e_1 ، ... ، e_n تشكّل أساساً لهذا المقياس؛ ويدعى: الأساس القانوني لِـ K^n . إذا اعتبرنا عنصرا

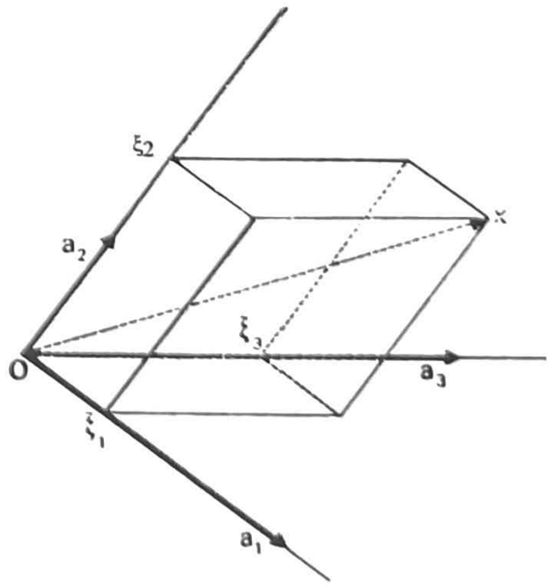
$$x = (\xi_1, ..., \xi_n) ،$$

فإن العلاقة

$$x = \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n$$

التي حصلنا عليها بالفقرة 1 تشير إلى أن إحداثيات x بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^n هي السلميات ξ_1 ، ... ، ξ_n .

مثال 13 - نعود إلى المثال 9 السابق؛ إن الأشعة $a_1, a_2, ..., a_n$ تشكل أساساً لِـ M إذا وإذا فقط كان $n = 3$ ولم تكن الأشعة a_1 ، a_2 ، a_3 محمولة على نفس المستوي. وإذا كان x شعاعاً ما، فإن إحداثياته تحسب بواسطة قاعدة «متوازي الوجوه»، التي يمكن فهمها بدراسة الصورة التالية:



إن التعاريف السابقة تطبق أيضاً على الزّمر التبديلية ؛ يكفي أن نضع $K = \mathbf{Z}$. وهكذا فإنه يمكن التحدث عن الزّمر التبديلية الحرّة ومن صنف منته ، وعن أسس زمرة تبديلية ما ، إذا كان لدينا زمرة تبديلية G (قانونها جمع - ولكن من المفيد أن يترجم القارئ الكتابة التالية باستعمال إشارة الضرب) ، إن كل أساس لِـ G هو عبارة عن متتالية a_1 ، ... ، a_n من عناصر G ، عددها منته ، بحيث يكون

$$(r_1, ..., r_n) \mapsto r_1 a_1 + ... + r_n a_n$$

تقابلاً من $\mathbf{Z}^n$ في G ؛ ونقول عن G أنها حرّة ومن صنف منته إذا كانت تقبل أساساً على الأقل .

وبما أن $\mathbf{Z}^n$ غير منتهية فإن كل زمرة تبديلية حرّة ومن صنف منته هي حتماً غير منتهية . وبالتالي فإن كل زمرة تبديلية منتهية هي مقياس على $\mathbf{Z}$ من صنف منته لا يقبل أساساً .

وهكذا فإنه يمكن لمقياس من صنف منته ألاّ يكون حرًّا من صنف منته (ألاّ يقبل أساساً) . ولكن لدينا :

نظرية 3 - كل فراغ شعاعي منته البعد يقبل أساساً . نترك برهان هذه النظرية إلى ف 19 ، رقم 2 ، على أن البرهان لا يعتمد سوى على محتوى هذا الفصل .

تشير النظرية 3 إلى أن القضية «كل مقياس على K من صنف منته هو حرّ من صنف منته» الخاطئة إذا كانت K حلقة كيفية ، هي قضية صادقة إذا كان K حقلاً .

ملاحظة 1 - حتى نتأكد من بعض النصوص ، نصطلح ، من أجل كل حلقة K ، أن نقول عن المقياس المقتصر على O أنه حر ومن صنف منته ، وأنه يقبل أساساً مؤلفاً من O شعاع .

ولفهم هذا الاصطلاح ينبغي أن نعرّف أساس مقياس M عل النحو التالي : هو جماعة منتهية $(a_i)_{i \in I}$ من الأشعة المستقلة خطياً والمولدة لِـ M ؛

ويمكن للمجموعة I أن تكون خالية ، ونحصل عندئذٍ على أساس للمقياس المقتصر على O ... .

ومن الضروري أيضاً أن نصطلح أن K° هو المقياس المقتصر على الشعاع O .

5. العبارات الخطية الغير منتهية (*)

لتكن K حلقة ، و I مجموعة كيفية (منتهية أو غير منتهية) ، و $(\lambda_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر K ؛ نقول عن السلميات λ_i أنها شبه منعدمة تماماً إذا كانت المجموعة المؤلفة من العناصر $i \in I$ بحيث $\lambda_i \neq 0$ منتهية ؛ ويمكن تعميم هذا التعريف حتى يشمل جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر مقياس ما .

ومن الواضح أن فائدة هذا المفهوم تزول عندما تكون I مجموعة منتهية .

ليكن M مقياساً على K و $(x_i)_{i\in I}$ جماعة من عناصر M ؛ لنفترض أن العناصر $(x_i)_{i\in I}$ شبه منعدمة تماماً : توجد عندئذٍ أجزاء منتهية من I ، نرمز لها J ، بحيث $x_i = 0$ من أجل $i \in I - J$ ؛ نضع بالتعريف :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i \text{ ؛}$$

ومن الواضح أن قيمة الطرف الأيسر لا تتعلق بِـ J (بمجرّد أن تحقق J الشروط السابقة) .

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة كيفية من عناصر M . نسمي عبارة خطية في الجماعة x_i كل $x \in M$ يحقق الشرط التالي :

توجد جماعة $(\xi_i)_{i\in I}$ من السلميات ، شبه منعدمة تماماً ، بحيث

$$x = \sum_{i\in I} \xi_i \, x_i \text{ ،}$$

(*) إن محتوى هذه الفقرة لن يستخدم قبل ف 26 ؛ ويمكن للقارئ أن يؤجل دراستها حتى يحتاجها .

ومن الواضح أن لهذه الكتابة معنى نظراً لأن الجماعة $(\xi_i\, x_i)_{i\in I}$ شبه منعدمة تماماً.

يمكن لنا أن نرى أن المجموعة M' المؤلفة من العبارات الخطية في $(x_i)_{i\in I}$ هي أصغر مقياس جزئي من M يحتوي كل العناصر x_i، $i\in I$؛ ويسمى **المقياس الجزئي** من M **المولد عن الجماعة** $(x_i)_{i\in I}$.

ونسمي، من جهة أخرى، **علاقة خطية بين العناصر** x_i، $i\in I$، كل جماعة $(\lambda_i)_{i\in I}$ من السلميات شبه المنعدمة كلياً بحيث

$$\sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i = 0 \;؛$$

وإذا كانت هذه العلاقة تستلزم $\lambda_i = 0$ مهما كان $i\in I$، فإننا نقول عن الجماعة $(x_i)_{i\in I}$ أنها حرّة، أو عن الأشعة x_i، $i\in I$، أنها مستقلة خطياً.

نسمي أساساً لِـ M كل جماعة حرّة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر M ومولد لِـ M. ومن أجل كل $x\in M$ فإنه يمكن عندئذٍ كتابة

$$x = \sum_{i\in I} \xi_i\, x_i$$

بطريقة وحيدة، حيث $(\xi_i)_{i\in I}$ جماعة من السلميات شبه منعدمة تماماً، وتسمى **مركبات** x **بالنسبة للأساس** $(x_i)_{i\in I}$ المتعلق بِـ M.

وإذا كان المقياس M يقبل أساساً فنقول عن M أنه مقياس حرّ.

يمكن أن نبرهن أن كل فراغ شعاعي على حقل يقبل أساساً؛ ولكن البرهان على هذه النص أكثر صعوبة من برهان النظرية 3 ويتعدى مستوى هذا الكتاب.

مثال 14 – إن المثال 10 يشير إلى أن جماعة التوابع

$$t^n \,;\, n = 0, 1, 2, \ldots$$

هي جماعة حرّة في الفراغ الشعاعي المذكور؛ هذا وان العبارات الخطية في هذه التوابع هي التوابع المعرّفة بكثيرات الحدود ذات متحول حقيقي (ف 28).

مثال 15 - نعتبر أن **C** فراغ شعاعي على **Q**؛ إن القول أن العدد $z \in$ **C** متصاعد يعني القول بأن الجماعة 1، z، z^2، ... جماعة حرة.

ف 12. التطبيقات الخطية . المصفوفات

1. تعريف التماثلات

ليكن L و M مقياسين على اليسار ، على حلقة K . يسمى كل تطبيق :

$$f: L \to M$$

يحقق : $f(\lambda x + \mu y) = \mu f(x) + \mu f(y)$ مهما كان x وَ y في L و λ و μ في K ، يسمى تماثلاً أو تطبيقاً خطياً من L في M .

ويسمى تشاكلاً من L على M كل تماثل تقابلي من L في M ؛ نقول عن L وَ M أنهما متشاكلان فيما إذا وجد تشاكل من L على M .

أخيراً إذا كان لدينا مقياس على اليسار M ، على حلقة K فإن كل تماثل من M في M يدعى تماثلاً داخلياً لِـ M (ويدعى أحياناً مؤثراً خطياً في M) ، ويدعى كل تشاكل من M على نفسه تشاكلاً ذاتياً لِـ M .

ليكن L وَ M مقياسين على اليسار ، على حلقة K ؛ لكي يكون تطبيق f من L في M خطياً يجب ويكفي أن تتحقق العلاقتان :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

وذلك مهما كان x و y في L و λ في K .

بإعتبار $\lambda = 0$ في العلاقة الثانية يتضح أن :

$$f(0) = 0$$

ومن جهة أخرى، إذا كان f تماثلاً من L في M فإن العلاقة التالية محققة:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n(x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (1)$$

مهما كان العدد الطبيعي n والأشعة x_1، ...، x_n في L والأعداد السلمية λ_1، ...، λ_n في K؛ تعطي هذه العلاقة تعريف التماثلات إذا وضعنا فيها $n = 2$، ويمكن إثبات العلاقة هذه في الحالةالعامة بالتدريج بالنسبة للعدد الطبيعي n:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = f[(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) + \lambda_n x_n]$$

$$= f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) + f(\lambda_n x_n)$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n)$$

وهو المطلوب.

سنكثر من استعمال العلاقة (1) فيما يلي دون تكرار ذكرها دائماً.

نظرية 1 – إذا كان $f: L \to M$ و $g: M \to N$ تماثلي مقاييس، فإن التطبيق المركب $g \circ f$ هو أيضاً تماثل، ويكون تشاكلاً فيما إذا كان f وَ g تشاكلين. إن التطبيق العكسي لتشاكل مقياسين هو أيضاً تشاكل مقياسين.

ليكن $h = g \circ f$؛ لدينا:

$$h(\lambda x + \mu y) = g[f(\lambda x + \mu y)] = g[\lambda f(x) + \mu f(y)]$$
$$= \lambda g[f(x)] + \mu g[f(y)] = \lambda h(x) + \mu h(y)$$

وهذا يبين أن h تماثل؛ إذا كان، بالإضافة إلى ذلك، f وَ g تشاكلين أي إذا كان f وَ g تقابليين، فإن الخاصية نفسها يتمتع بها h فيصبح بذلك تشاكلاً.

نفرض أن f تشاكل، لاثبات أن f^{-1} (التقابلي) تشاكل يكفي البرهان على أنه خطي، أي أن:

$$f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$$

مهما كان λ وَ μ في K وَ u وَ v في M ، وهو ما يكافئ :

$\lambda u + \mu v = f[\lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)]$ ؛ لما كان f خطياً فإن العلاقة السابقة تكتب على الشكل :

$$\lambda u + \mu v = \lambda f[f^{-1}(u)] + \mu f[f^{-1}(v)]$$

وبالتالي فهي محققة بداهة ، ومنه النظرية .

باتباع الطريقة التي سلكناها في الفقرة 8 من ف7 نستخلص من النظرية 1 أن «X وَ Y متشاكلان» علاقة تكافؤ بين المقاييس على اليسار على حلقة K .

أما من الناحية العملية ، فكثير ما ننظر لمقياسين متشاكلين على أنهما متطابقان ؛ وبعبارة أدق إذا كان f تشاكلاً من L على M فإننا نستطيع كتابة كل علاقة جبرية تربط عناصر L على شكل علاقة مماثلة تربط صور تلك العناصر بواسطة f ، ومنه يتسنى لنا تحويل كل خاصية يتمتع بها L إلى خاصية مماثلة يتمتع بها M . من فائدة القارئ أن يتأكد من ذلك كلما استطاع .

نظرية 2 - ليكن $f: L \to M$ تماثل مقياسين . إن صورة مقياس جزئي من L بواسطة f هي أيضاً مقياس جزئي من M . كما أن الصورة العكسية بواسطة f لمقياس جزئي من M هي أيضاً مقياس جزئي من L .

ليكن L' مقياساً جزئياً من L ؛ نفرض أن $f(L')$ يحتوي على عنصرين u وَ v من M ؛ نستطيع عندئذ كتابة : $u = f(x)$ ، $v = f(y)$ حيث x وَ y عنصران من L' ؛ لما كان f خطياً فإن $\lambda u + \mu v = f(\lambda x + \mu y) = f(z)$ حيث $L' \ni z = \lambda x + \mu y$ وذلك لأن L' مقياس جزئي من L ؛ ومنه نرى أن $f(L')$ يحتوي على $\lambda u + \mu v$ مهما كان العددان السلميان λ وَ μ ، وهذه هي النتيجة الأولى للنظرية ، أما النتيجة الثانية فيمكن البرهان عليها بطريقة مماثلة .

وبصفة خاصة نستطيع القول أن نواة f ، أي مجموعة العناصر x المنتمية

لِـ L التي تحقق $f(x) = 0$، مقياس جزئي من L، نرمز لهذه المجموعة بِـ $\mathrm{Ker}(f)$ طبقاً للفقرة 9 من ف 7؛ كما أن الصورة:

$$\mathrm{Im}(f) = f(L)$$

للتطبيق f مقياس جزئي من M. نذكر (النظرية 8، ف 7) أن f تباين إذا وفقط إذا احتوت نواته على 0 لا غير.

2. التماثلات من مقياس حر ذي صنف منته في مقياس كيفي.

تعتبر النظرية التالية نتيجة أساسية:

النظرية 3 - ليكن L مقياساً على اليسار حرّاً ومن صنف منته على الحلقة K(*)، وليكن $a_1, ..., a_p$ أساساً لِـ L، وَ M مقياساً على اليسار على الحلقة K، ولتكن $c_1, ..., c_p$ عناصر مفروضة من M. يوجد عندئذ تماثل وحيد f من L في M يحقق:

$$f(a_i) = c_i; \qquad 1 \leq i \leq p$$

لكي يكون f متباينا (غامراً، بالترتيب) يجب ويكفي أن تكون الأشعة $c_1, ..., c_p$ مستقلة خطياً (مولدة لِـ M، بالترتيب).

في حالة وجود التماثل f تؤكد العلاقة (1) من الفقرة 1 أنه معطى حتماً بواسطة الدستور:

$$f(\xi_1 a_1 + ... + \xi_p a_p) = \xi_1 c_1 + ... + \xi_p c_p \qquad (2)$$

وهذا ما يثبت وحدانية f.

(*) يمكن تعميم النظرية 3 لتشمل حالة مقياس حر كيفي، وهذا ما يستطيع القارئ أن يتأكد منه بسهولة.

لإثبات وجود f نلاحظ أنه توجد، من أجل كل x في L، جملة وحيدة من الأعداد السلمية ξ_i $(1 \leq i \leq p)$ بحيث:

$$x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_p a_p$$

لدينا من جهة أخرى

$$\xi_1 = f_i(x)(1 \leq i \leq p)$$

حيث ترمز $f_i : L \to K$ للتوابع الإحداثية للمقياس L بالنسبة للأساس $a_1, \ldots, a_p$ (أنظر الفقرة 4 من ف 11). بعد هذا نلاحظ أن الدستور (2) يعرف بالفعل التطبيق f من L في M وهو معطى أيضاً، حسب ما ورد أعلاه، بالعلاقة:

$$f(x) = f_1(x)\, c_1 + \ldots + f_p(x)\, c_p$$

وهكذا يتبين أن الأمر يعود إلى البرهان على أن f تماثل يحوّل الأشعة a_i إلى الأشعة c_i.

إن النتيجة الثانية من النظرية تأتي مباشرة من الدستور:

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

الذي بيناه في الفقرة 4 من ف 11، وكذا من العلاقة:

$$c_i = 0 \cdot c_1 + \ldots + 0 \cdot c_{i-1} + 1 \cdot c_i + 0 \cdot c_{i+1} + \ldots + 0 \cdot cp$$

حتى نثبت أن f تماثل، نلاحظ أولاً أننا بينّا في الفقرة 4 من ف 11 العلاقة:

$$f_i(\lambda x + \mu y) = \lambda f_i(x) + \mu f_i(y)$$

أي أن التوابع الإحداثية $f_i : L \to K$ تماثلات للمقياسين على اليسار على الحلقة K. وبالتالي:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f_1(\lambda x + \mu y)c_1 + \ldots + f_p(\lambda x + \mu y)c_p \\ &= [\lambda f_1(x) + \mu f_1(y)]c_1 + \ldots + [\lambda f_p(x) + \mu f_p(y)]c_p \\ &= \lambda[f_1(x)\, c_1 + \ldots + f_p(x)\, c_p] + \mu[f_1(y)c_1 + \ldots + f_p(y)c_p] \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت خطية f.

يبقى الآن تعيين الشروط التي تجعل f متباينا أو غامراً. في البداية نلاحظ أنه من الواضح بأن الصورة $f(L)$ هي مجموعة العبارات الخطية للأشعة $c_1, \ldots, c_p$ ، أي أن f تطبيق من L على مقياس جزئي من M مولد عن $c_1, \ldots, c_p$: إذن فالشرط اللازم والكافي لكي يكون f غامراً هو أن تولد الأشعة c_i المقياس M.

من جهة أخرى لكي يكون f متبايناً يجب ويكفي أن تؤدي العلاقة $f(x) = 0$ إلى $x = 0$ ، أي أن العلاقة :

$$\xi_1\, c_1 + \ldots + \xi_p\, c_p = 0$$

تستوجب $\xi_1\, a_1 + \ldots + \xi_p\, a_p = 0$ وذلك يقتضي :

$$\xi_1 = 0, \ldots, \xi_p = 0$$

(لأن الأشعة a_i مستقلة خطياً).

وهو المطلوب في النظرية 3.

نتيجة 1 – إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون مقياس M على حلقة K ، حراً ومن صنف منته هو أن يوجد عدد صحيح n بحيث يكون M وَ K^n متشاكلين. وبصفة أدق، لتكن $c_1, \ldots, c_n$ عناصر من M وَ $e_1, \ldots, e_n$ الأساس القانوني لِـ K^n ؛ لكي تشكل الأشعة c_i أساساً لِـ M يلزم ويكفي أن يوجد تشاكل من K^n على M يحوّل الأشعة e_i إلى الأشعة c_i.

يوجد دوماً، حسب النظرية 3، تماثل وحيد :

$$f : K^n \to M$$

يحقق :

$$f(e_i) = c_i \quad ; \quad (1 \le i \le p)$$

لكي تشكل الأشعة c_i أساساً لِـM يلزم ويكفي أن تكون هذه الأشعة مستقلة خطياً ومولدة لِM ، أي أن يكون f متبايناً وغامراً ومنه النتيجة المطلوبة.

نتيجة 2 - إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون مقياس M ، على حلقة K ، من صنف منته هو أن يوجد عدد صحيح n وتماثل غامر من K^n في M .

بعبارة أدق ، لكي تولد أشعة $c_1, ..., c_n$ المقياس M ، يلزم ويكفي أن يكون التماثل $f: K^n \to M$ المعرف بِـ : $f(e_i) = c_i$ ، غامراً ومنه يأتي لزوم الشرط . أما كفاية الشرط فهي ناتجة عن كون K^n من صنف منته وعن الملاحظة التالية : ليكن :

$$f: L \to M$$

تماثل مقياسين على K ؛ إذا كان f غامراً و L من صنف منته فإن M من صنف منته . لإثبات ذلك نعتبر الجملة $a_1, ..., a_n$ المولدة لِـ L ونضع $b_i = f(a_i) \quad (1 \le i \le n)$ ؛ مهما كان y في M يوجد x في L بحيث $y = f(x)$ ؛ لنكتب $x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_n a_n$ ولنستعمل العلاقة (1) من الفقرة 1 ، نرى عندئذ بأن $y = \xi_1 b_1 + ... + \xi_n b_n$ وبالتالي فإن الأشعة b_i تولد M وعليه فهو من صنف منته .

3. التماثلات والمصفوفات .

تسمح النظرية 3 بإنشاء كل التماثلات من مقياس L حر ومن صنف منته في مقياس كيفي M ؛ للوصول إلى أبعد من ذلك ، نفرض أن M أيضاً حر ومن صنف منته . نرمز فيما يلي بِـ : $a_1, ..., a_p$ لأساس لِـ L وبِـ $b_1, ..., b_q$ لأساس لِـ M . نفرض من ناحية ثانية أن L وَ M مقيسان على اليمين ، على حلقة K (نترك للقارئ دراسة حالة المقاييس على اليسار التي لا تختلف عن سابقتها عندما يكون K تبديلياً) .

ليكن إذن $f: L \to M$ تماثلاً . نعتبر شعاعاً :

$$x = a_1 \xi_1 + \dots + a_p \xi_p \tag{3}$$

في L ، وصورته :

$$f(x) = y = b_1 \eta_1 + \dots + b_q \eta_q \tag{4}$$

في M ؛ هدفنا الآن هو إيجاد دساتير تسمح بحساب الإحداثيات $\eta_1, \dots, \eta_q$ للشعاع $f(x)$ بالنسبة للأساس $b_1, \dots, b_q$ لِـ M وذلك بدلالة الإحداثيات $\xi_1, \dots, \xi_p$ لِـ x بالنسبة للأساس $a_1, \dots, a_p$ لِـ L .

من أجل ذلك نضع :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a_1) = c_1 = b_1 \alpha_{11} + b_2 \alpha_{12} + \dots + b_q \alpha_{1q} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(a_p) = c_p = b_1 \alpha_{p1} + b_2 \alpha_{p2} + \dots + b_q \alpha_{pq} \end{array} \right. \tag{5}$$

حيث نظهر إحداثيات الأشعة $f(a_1), \dots, f(a_p)$ بالنسبة للأساس $b_1, \dots, b_q$: إن هذه الإحداثيات α_{ij} لا تتعلق إلاّ بِـ f وبالأساسين المختارين في L وَ M .

لدينا الآن :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 \xi_1 + \dots + c_p \xi_p \\ &= (b_1 \alpha_{11} + b_2 \alpha_{12} + \dots + b_q \alpha_{1q})\xi_1 \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + (b_1 \alpha_{p1} + b_2 \alpha_{p2} + \dots + b_q \alpha_{pq})\xi_p \end{aligned}$$

باجراء علميات الجمع في الطرف الأخير وفق الأعمدة نحصل على القيم المطلوبة بالنسبة لإحداثيات $f(x)$ ، وهي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2 + \dots + \alpha_{p1} \xi_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_q = \alpha_{1q} \xi_1 + \alpha_{2q} \xi_2 + \dots + \alpha_{pq} \xi_p \end{array} \right. \tag{6}$$

تسمى هذه الدساتير **معادلات f بالنسبة للأساس $(a_i)_{1\le i\le p}$ لِـ L وللأساس $(b_j)_{1\le j\le q}$ لِـ M**؛ يمكن كتابة هذه المعادلات على الشكل المختصر التالي:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_{ij}\,\xi_i \qquad \text{(6 مكرر)}$$

ننظر الآن إلى القضية العكسية بالإنطلاق من الأعداد السلمية α_{ij} من K ($1 \le i \le p$، $1 \le j \le q$) لتعريف تطبيق f من L في M بواسطة الدساتير (6): إن f يحوّل، إذن، كل شعاع x من L إحداثياته $\xi_1, ..., \xi_p$ بالنسبة للأساس المعطى في L، إلى شعاع من M، إحداثياته $\eta_1, ..., \eta_q$ بالنسبة للأساس المعطى في M، وتحسب هذه الإحداثيات بفضل العلاقات (6). وبالتالي فإن f تماثل من L في M، وذلك لأن:

$$\begin{aligned}
f(x) &= b_1\,\eta_1 + \dots + b_q\,\eta_q \\
&= b_1(\alpha_{11}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{p1}\,\xi_p) \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots \\
&\quad + b_q(\alpha_{1q}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{pq}\,\xi_p \\
&= c_1\,\xi_1 + \dots + c_p\,\xi_p
\end{aligned}$$

حيث ترمز c_i للأشعة التي تعطيها الدساتير (5)، ومنه يتبين لنا أن f هو التماثل الذي أثبتت النظرية 3 وجوده.

نشير أخيراً إلى أن فرض وجود التماثل f يؤدي إلى وجود جملة وحيدة من الأعداد السلمية α_{ij} تجعل f معرفاً تماماً بالعلاقات (6)، ذلك أن الحسابات التي تناولناها آنفاً تبين في هذه الحالة أن الأعداد α_{ij} هي حتماً إحداثيات الأشعة $f(a_i)$ بالنسبة للأساس $(b_j)_{1\le j\le q}$ لِـ M، وهو ما يعين هذه الأشعة تعيناً تاماً.

نعود الآن إلى الدساتير (6) وهي الدساتير التي تسمح معرفتها بتعريف التماثل f. من الواضح أنه لتذكر هذه الدساتير يكفي معرفة الجدول:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1q} & \alpha_{2q} & \dots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

المكوّن من الثوابت α_{ij} (المساماة المعاملات الواردة في الدساتير (6)) . **يسمى كل جدول من الشكل (7) مصفوفة ذات p عمود وَ q سطر معاملاتها في الحلقة K** (تسمى الأعداد α_{ij} أيضاً حدود المصفوفة المعتبرة) ، كما نقول إن (7) مصفوفة التماثل f بالنسبة للأساس $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L وللأساس $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ لِـ M . إن الدور الذي يلعبه مفهوم المصفوفة بالنسبة للتماثلات شبيه بالدور الذي يلعبه مفهوم الإحداثيات بالنسبة للأشعة.

إذا كنا غير مطالبين بإجراء حسابات صريحة فإننا نرمز في معظم الأحيان للمصفوفة (7) بالكتابة المختصرة:

$$(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p};\ 1 \leq j \leq q$$

وفضل هذه الكتابة هي أنها تبين أن المصفوفة عبارة عن جماعة (أو عائلة) من عناصر K ، مفهرسة بثنائيات الأعداد الصحيحة (i, j) بحيث $1 \leq i \leq p$ ، $1 \leq j \leq q$.

عندما يكون $L = M$ ، أي عندما يكون f تماثلاً داخلياً للمقياس L ، فإننا نستعمل عادة نفس الأساس $a_1, ..., a_p$ في L وَ M وهو الأمر الذي يسمح لنا بالكلام عن **مصفوفة تماثل داخلي لِـ L بالنسبة لأساس لِـ L** . من الواضح في هذه الحالة أن للمصفوفة المعتبرة p عموداً و p سطراً؛ نقول عندئذ أن **المصفوفة مربعة من الرتبة p وذات معاملات في K** .

ملاحظة 1 - ليكن $f: L \rightarrow M$ تماثلاً لمقياسين حرين ومن صنف منته على K ، إننا لانستطيع الحديث في هذه الحالة عن مصفوفة f؛ لإعطاء معنى لهذا المفهوم ينبغي أن نختار في البداية أساساً لِـ L وأساساً لِـ M ، وعندها تصبح المصفوفة التي نحصل عليها متعلقة باختيار الأساسين (سنرى في ف 15 ماذا يحدث عندما نغير أساسي L وَ M) .

إذا كان $L = K^p$ وَ $M = K^q$ فإنه من اللازم إختيار الأساس القانوني لِـ L والأساس القانوني لِـ M (أنظر المثال 12 من ف 11) ؛ إذن إذا كان لدينا تماثل:

$$f: K^p \rightarrow K^q$$

فإنه من حقنا في هذه الحالة الكلام عن مصفوفة f (وقصدنا هو المصفوفة بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^p وللأساس القانوني لِـ K^q) إذا رمزنا لهذه المصفوفة بِـ $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ يصبح f عبارة عن التطبيق الذي يحوّل كل شعاع :

$$x = (\xi_1, ..., \xi_p) \in K^p$$

إلى الشعاع :

$$f(x) = (\eta_1, ..., \eta_q) \in K^q$$

المعطى بالعلاقات (6) الواردة أعلاه .

فيما يخص القضية العكسية فإن نفس الإنشاءات تسمح بربط كل مصفوفة $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq q}$ بتماثل معين تماماً من K^p في K^q – وهو التماثل الذي مصفوفته تطابق المصفوفة المعطاة .

تبين هذه الإعتبارات وجود تقابل «قانوني» من مجموعة التماثلات من K^p في K^q ، على مجموعة المصفوفات المكونة من p عمود وَ q سطر (والتي معاملاتها تنتمي إلى K) . سنستعمل بكثرة هذه الصلة التي تربط التماثلات بالمصفوفات وذلك دون أن نكرر دوماً ذكرها .

ملاحظة 2 – ليكن L وَ M مقياسين على اليمين حرين ومن صنف منته على حلقة K ، وليكن $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ أساساً لِـ L وَ $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ أساساً لِـ M . نعرّف بعد هذا التشاكلين $u : K^p \to L$ وَ $v : K^q \to M$ بكونهما يطبقان (بالترتيب) الأساسين القانونيين لِـ K^p وَ K^q على الأساسين المعطيين في L وَ M (أنظر النتيجة 1 من النظرية 3) .

ليكن $f : L \to M$ تماثلاً . نستطيع الآن تعريف تماثل جديد (النظرية 1) إنطلاقاً من u وَ v :

$$\bar{f} = v^{-1} \circ f \circ u : K^p \to K^q$$

إن مصفوفة f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ L وللأساس (b_j) لِـ M ، تطابق مصفوفة $\bar{f}$ (بالنسبة للأساسين القانونيين لِـ K^p و K^q) . لتوضيح ذلك نعتبر الشعاعيين :

$$x = a_1 \xi_1 + \dots + a_p \xi_p$$
$$f(x) = b_1 \eta_1 + \dots + b_q \eta_q$$

حيث تكتب الأعداد السلمية η_j بدلالة الأعداد ξ_i وذلك بواسطة الدساتير (6). يبين إنشاء u أن :

$$x = u(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

كما أن :

$$f(x) = v(\eta_1, \dots, \eta_q)$$

إذن :

$$(\eta_1, \dots, \eta_q) = v^{-1}[f(x)] = v^{-1}\left\{f[u(\xi_1, \dots, \xi_p)]\right\}$$
$$= \bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

من ذلك نستنتج أن الدساتير (6) هي معادلات $\bar{f}$ (بالنسبة للأسس القانونية) وهو المطلوب إثباته.

نرى إذن أنه كان بامكاننا إدخال المصفوفات بأن نبين أولاً كون كل تماثل من K^p في K^q يعرّف حتماً بعلاقات من النوع (6)، ثم نلاحظ أنه إذا كان لدينا تماثل $f: L \to M$ لمقياسين حرين ومن صنف منته فإن إختيار أساس لـ L وأساس لـ M يسمح بمطابقة L بمقياس K^p، و M بمقياس K^q وهذا يسمح بدوره بمطابقة f بتماثل $\bar{f}$ من K^p في K^q؛ وهو تماثل معطى، إذن، بواسطة العلاقات (6) وبالتالي ممثل بكيفية قانونية بواسطة مصفوفة. وهكذا عثرنا من جديد على إمكانية ربط مصفوفة بـ f بمجرد إختيار أساس لـ L وأساس لـ M.

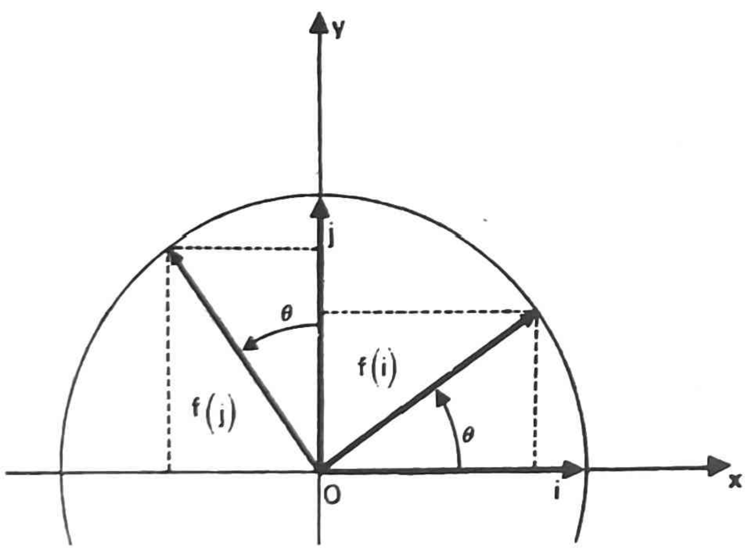
4. أمثلة للتماثلات والمصفوفات

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة الخاصة بالتماثلات وبكتابة تماثل على شكل مصفوفة.

مثال 1 - ليكن L فضاء شعاعياً حقيقياً مكوناً من أشعة نقطة بدئها O في المستوى المعتاد، نعتبر التطبيق $f: L \to L$ الذي يحوّل كل شعاع نقطة بدئه O إلى الشعاع الذي نحصل عليه بواسطة الدوران حول النقطة O بزاوية (معطاة) θ. من الواضح أن هذا التطبيق خطي (لأن الدوران يحوّل كل متوازي أضلاع إلى متوازي أضلاع ولأن كل دوران مركزه O يتبادل مع كل تحاك مركزه O).

لتكن Ox، Oy جملة إحداثيات قائمة في المستوى، و i وَ j الشعاعين الواحديين(*) لـ Ox و Oy؛ من السهل إثبات العلاقتين التاليتين هندسياً:

$$f(i) = i \cdot \cos\theta + j \cdot \sin\theta$$
$$f(j) = -i \sin\theta + j \cdot \cos\theta$$



ومنه نستنتج كتابة مصفوفة f بالنسبة للأساس (i, j) لـ L، وهي:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(علينا ألاّ ننسى بأن سطور المصفوفة (7) تماثل تسنتج باعتبار الأعمدة البادية في العلاقات (5)، وهو ما يفسر النتيجة التي حصلنا عليها هنا).

(*) واضح أنه ليس هناك أية صلة بين الشعاع i والعدد العقدي i ...

مثال 2 - لنأخذ $L = M$ ولنفرض أن K تبادلي ؛ عندئذ يصبح التطبيق $x \to \lambda x$ (الذي هو تحاك في L نسبته λ) خطياً، وذلك مهما كان λ في K .
يحول هذا التطبيق كل أساس $a_1, ..., a_n$ لِـ L إلى الأشعة :

$$\lambda a_1 = \lambda \cdot a_1 + o \cdot a_2 + ... + o \cdot a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda a_n = o \cdot a_1 + o \cdot a_2 + ... + \lambda \cdot a_n$$

نرى إذن أن مصفوفة تحاك نسبته λ، بالنسبة للأساس كيفي لِـ L هي :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

نقول عن هذه المصفوفة إنها **مصفوفة سلمية** معاملاتها في الحلقة K .

نلاحظ هنا أن مصفوفة f مستقلة عن اختيار الأساس $a_1, ..., a_n$ لِـ L ؛ يمكن أن نبين بسهولة أن التحاكيات هي التماثلات الداخلية الوحيدة لِـ L ، التي تمتع بهذه الخاصية.

مثال 3 - الشكل الخطي (أو الشعاع المرافق) على مقياس على اليمين L ، على حلقة K هو، تعريفاً، تماثل من L في K ، أي تطبيق :

$$f : L \to K$$

يحقق :

$$f(x\lambda + y\mu) = f(x)\lambda + f(y)\mu$$

مهما كان λ ، μ في K وَ x ، y في L .

تبين الفقرة 4 من ف 11 مثلاً أن التوابع الإحداثية لِـ L بالنسبة لأساس لِـ L ، أشكال خطية على L .

ليكن f شكلاً خطياً على L ، ولنختر (إذا أمكن) أساساً $a_1, ..., a_p$ لِـ L ؛ إذا كنا نريد ربط f بمصفوفة فيجب كما هو الحال بالنسبة لكل تماثل لمقياسين حرين ومن صنف منته، إختيار أساس للمقياس على اليمين K ،

على الحلقة K : نختار الأساس القانوني لِـ K ، المشكل من الشعاع (كذا) 1 .
لحساب مصفوفة f بالنسبة لهذين الأساسين، علينا أن نكتب :

$$f(a_1) = 1 \cdot \alpha_{11}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f(a_p) = 1 \cdot \alpha_{p1}$$

من الواضح أننا نبسط هذه الكتابة إذا ما وضعنا :

$$f(a_1) = \alpha_1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f(a_p) = \alpha_p$$

وعندئذ يُصبح f ممثلاً ، بالنسبة للأساسين المعتبرين لِـ L وَ K ، بواسطة المصفوفة السطرية :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

إن تعاطي هذه المصفوفة يعين تماماً f وذلك بفضل العلاقة :

$$f(a_1 \xi_1 + \dots + a_p \xi_p) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_p$$

نقول عادة أن α_i هي معاملات f بالنسبة للأساس $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L .

بصفة خاصة إذا كان $L = K^p$ فإنه من المحتم إختيار الأساس القانوني لِـ L ؛ حينئذ تسمى الأعداد α_i **معاملات** f (والمقصود بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^p) ، ويكون f معطى بالعلاقة :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_p \xi_p$$

مثال 4 - ليكن M مقياساً على اليمين على K ، نعتبر تماثلاً :

$$f : K \to M$$

لمقياسين على اليمين على K ؛ ونضع :

$$f(1) = c \in M$$

عندئذ :

$$f(\xi) = f(1 \cdot \xi) = f(1)\xi = c\xi$$

ومعنى هذا هو أن معرفة c تعين تماماً f (إننا لا نفرق، من الناحية العملية، التماثل f والعنصر c من M) . نفرض أن لِـ M أساساً $b_1, ..., b_q$ ؛ أما في K فنستعمل الأساس القانوني ؛ إذا وضعنا :

$$c = f(1) = b_1 \alpha_1 + ... + b_q \alpha_q$$

فإننا نرى أن مصفوفة f بالنسبة للأساسين المعتبرين لِـ K وَ M هي المصفوفة العمودية :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$$

المكونة من مركبات الشعاع c بالنسبة للأساس المعتبر في M .

يحدث أحياناً أن نطابق (بعد إختيار أساس لِـ M) كل شعاع من M بالمصفوفة العمودية المكونة من إحداثيات الشعاع المعتبر بالنسبة للأساس المختار في M ؛ سنبرر وجهة النظر هذه فيما بعد (الفقرة 4، ف 14) .

إن الأمثلة السابقة ذات طابع جبري بحت (كما هو الحال بالنسبة للمقاييس الحرة من الصنف المنتهي) . وعلى العكس من ذلك تتوفر في مادة التحليل أمثلة لتماثلات يعتبر تمثيلها بواسطة مصفوفات (ولو كانت غير منتهية) عملاً اصطناعياً . هاك بعض الأمثلة في هذا الموضوع .

مثال 5 - ليكن a وَ b عددين حقيقيين بحيث $a < b$ ، نرمز بِـ X لمجموعة الأعداد الحقيقية t التي تحقق $a \leq t \leq b$ (X هو إذن المجال $[a; b]$) ، ولنرمز بِـ L للفضاء الشعاعي الحقيقي المكوّن من كل التطبيقات $f : X \to \mathbf{R}$ المستمرة عند كل نقطة من X (أنظر المثالين 4 وَ 7 في ف 10) . ليَكن $N(s, t)$ تابعاً قيمه حقيقية، معرفاً ومستمراً على المربع $X \times X$. يمكن (باستعمال الإستمرار المنتظم لِـ N على $X \times X$) البرهان على أن التابع :

$$f^*(s) = \int_a^b N\ (s, t)\, f(t)\, dt \qquad ; \qquad (a \leq s \leq b)$$

مستمر على المجال X مهما كان التابع f في L، أي أن $f^* \in L$. بعد هذا، يتبين أن التطبيق $u: f \to f^*$ من L في L خطي. لتوضيح ذلك نعتبر f وَ g في L ونضع $f + g = h$؛ لدينا:

$$h^*(s) = \int_a^b N(s, t)\, h(t)\, dt = \int_a^b N(s, t)[f(t) + g(t)]\, dt$$

$$= \int_a^b N(s, t)\, f(t)\, dt + \int_a^b N(s, t)\, g(t)\, dt = f^*(s) + g^*(s)$$

أي أن لدينا $h^* = f^* + g^*$ ومنه يأتي $u(f + g) = u(f) + u(g)$؛ كما نثبت بنفس الطريقة العلاقة: $u(\lambda f) = \lambda u(f)$ مهما كان λ في $\mathbf{R}$.

يسمى التطبيق u من L في L **مؤثراً تكاملياً**: وقد أدت دراسة هذا النوع من المؤثرات (خاصة تلك التي قام بها هيلبرت (Hilbert) و ف. ريس ((F. Riesz)) إلى ظهور، في الربع الأول من القرن العشرين، ما يسمى اليوم بالتحليل التابعي. من الطبيعي أن تكون الإعتبارات الجبرية المحضة والبديهية أساساً، الواردة في هذا الكتاب، بعيدة عن تقديم مساعدة جادة للتحليل التابعي (ولولاه لكان الأمر هيناً للغاية...)، فالشيء الذي توفره له هو فقط مصطلحات منطقية وفكرة غير دقيقة حول الإتجاهات التي ينبغي أن يسلكها البحث؛ والواقع أن الصعوبات التي نتلقاها في التحليل التابعي عندما نرغب في الوصول إلى نتائج غير بديهية ليست ذات طابع جبري، بل هي «تحليلية» في معظم الأحيان، ويقتضى التغلب عنها استخدام طرق «توبولجية» (أي طرق تستند على مفهوم «الاستمرار») ويجدر بنا، في هذا النطاق، أن نلاحظ بأن تطور الجبر الخطي الأولى قد تأثر كثيراً بتطور التحليل التابعي في الوقت الذي قد يكون الناس يتمنون حدوث التأثير المعاكس...

مثال 6 - نأخذ الفضاء الشعاعي الحقيقي L المعرف أعلاه. إن التطبيق:

$$f \to \int_a^b f(t)\, dt = I(f)$$

من L في $\mathbf{R}$ شكل خطي على L: لرؤية ذلك نعتبر تابعين f وَ g مستمرين على المجال $[a; b]$، ونلاحظ أن تكامل التابع $f + g$ هو مجموع تكاملي التابعين

f وَ g ؛ وإذا ما ضربنا f في ثابت $\lambda \in \mathbf{R}$ فإن تكامله يضرب أيضاً في نفس الثابت .

مثال 7 - نعتبر الفضاءين الشعاعيين الحقيقين L وَ M المعرفين كالتالي : عناصر L هي التطبيقات $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ التي تقبل مشتقاً ثانياً مستمراً f'' ، وعناصر M هي التطبيقات المستمرة $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (لانفرض على عناصر M أي شرط خاص بالإشتقاق) . من الطبيعي أن تكون العمليات الشعاعية في L وَ M نفس التي عرفت في المثال 4 من ف 10 .

نختار توابع a ، b ، c في M (أي توابع مستمرة ذات متغير حقيقي) ، ثم من أجل كل تابع f في L نشكل التابع :

$$f^*(t) = a(t)\,f(t) + b(t)\,f'(t) + c(t)\,f''(t)$$

واضح أن f^* ينتمي إلى M ، ومنه نعرف تابعاً جديداً $D: L \to M$ بالعلاقة $D(f) = f^*$ مهما كان f في L .

لنثبت أن D تماثل :

$$\begin{aligned} D(f+g) &= a(f+g) + b(f+g)' + c(f+g)'' \\ &= af + bf' + cf'' + ag + bg' + cg'' = D(f) + D(g) \end{aligned}$$

كما نبين بطريقة مماثلة المساواة : $D(\lambda f) = \lambda D(f)$

تدخل التماثلات من هذا النوع في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية .

نشير إلى أنه من اليسير أيضاً إنشاء أشكال خطية على الفضاء الشعاعي L ، كما هو الحال مثلاً بالنسبة للتطبيق :

$$f \to f''(0)$$

من L في $\mathbf{R}$ الذي يلحق بكل f في L قيمة المشتق الثاني لِـ f عند النقطة $t = 0$.

ف 13 . جمع التماثلات والمصفوفات

1m. الزمر الجمعية $\mathrm{Hom}(L, M)$

ليكن L وَ M مقياسين (على اليسار مثلا) على حلقة كيفية K . نرمز بـ : $\mathrm{Hom}(L, M)$ أو $\mathcal{L}(L, M)$ لمجموعة التطبيقات الخطية من L في M ؛ نستعمل أيضاً الرمز التالي (عندما يحتمل وقوع إشكال حول حلقة الأساس) : $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ أو $\mathcal{L}_K(L, M)$.

نظرية 1 - ليكن L وَ M مقياسين على اليسار، على K . إذا كان :

$$f, g : L \to M$$

تماثلين من L في M ، فإن التطبيق :

$$f + g : x \to f(x) + g(x)$$

تماثل أيضاً من L في M .

تصبح المجموعة $\mathrm{Hom}(L, M)$ بعد تزويدها بقانون التركيب $(f, g) \to f + g$ ، زمرة تبديلية .

نضع $h = f + g$ ؛ عندئذ :

$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda x + \mu y) + g(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \mu g(y) \\ &= \lambda[f(x) + g(x)] + \mu[f(y) + g(y)] \\ &= \lambda h(x) + \mu h(y) \end{aligned}$$

وهو ما يثبت النتيجة الأولى المنصوص عليها في النظرية. لإثبات النتيجة الثانية، نعتبر المجموعة E المؤلفة من التطبيقات (خطية كانت أو غير خطية) من L في M ؛ ونزودها بقانون التركيب $(f; g) \to f + g$ ، تكون هذه المجموعة زمرة تبديلية (أنظر المثال 4، ف. 10؛ نلاحظ أننا ننظر لِـ L بصفته مجموعة وليس كمقياس). بقي علينا أن نبين بأن $\text{Hom}(L, M)$ زمرة جزئية من E ؛ من الواضح أن $\text{Hom}(L, M)$ يحتوي على العنصر المحايد لِـ E وهو التطبيق من L في M الذي يأخذ القيمة 0 من أجل كل عنصر في L)، ومن جهة ثانية إذا كان f وَ g تماثلين فإن $f - g$ أيضاً تماثل كما يبينه القسم الأول من البرهان، ومنه النتيجة المطلوبة.

تسمح النظرية 1 بأن نسمي $\text{Hom}(L, M)$ **زمرة التماثلات من L في M**.

إذا كانت حلقة الأساس K تبديلية يكون باستطاعتنا اعتبار $\text{Hom}(L, M)$ كمقياس جديد على اليسار، على الحلقة K. نعود في البداية إلى المجموعة E المكونة من التطبيقات (الخطية وغير الخطية) من L في M ؛ يسمح لنا المثال 4، ف 10 باعتبار E ليس كزمرة جمعية فحسب بل كمقياس على اليسار على K، نشير إلى أن الجداء λf لعدد سلمي $\lambda \in K$ ولتطبيق $f: L \to M$، هو التطبيق:

$$x \to \lambda f(x)$$

من L في M (وهذا لا يستدعي أن يكون K تبديلياً). لكن لما كان K تبديلياً فالمجموعة $\text{Hom}(L, M)$ ليست زمرة جزئية فحسب بل هي أيضاً مقياس جزئي من E، أي إذا كان f تماثلا من L في M فالأمر كذلك بالنسبة لِـ $f' = \lambda f$ ؛ لأن لدينا:

$$f'(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) = \lambda\alpha \cdot f(x) + \lambda\beta \cdot f(y)$$
$$= \alpha\lambda f(x) + \beta\lambda f(y) = \alpha f'(x) + \beta f'(y)$$

وهو المطلوب. من حقنا إذن، وفي هذه الحالة، النظر إلى $\text{Hom}(L, M)$ على أنه مقياس على اليسار على K.

إذا كان، مثلاً، L وَ M فضاءين شعاعيين حقيقيين (عقديين، بالترتيب) فإنه بإمكاننا النظر لِـ $\text{Hom}(L, M)$ على أنه فضاء شعاعي حقيقي (عقدي، بالترتيب).

2. جمع المصفوفات

نفرض فيما سبق أن L وَ M مقياسان على اليمين حران ومن صنف منته، على الحلقة K ؛ نختار أساساً $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ لِـ L وأساساً $(b_j)_{1\leq j\leq q}$ لِـ M ؛ أخيراً إذا كان f وَ g تماثلين من L في M ، نرمز بِـ :

$$A = (\alpha_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q}$$

$$B = (\beta_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q}$$

للمصفوفتيهما بالنسبة للأساسين المعتبرين في L وَ M . لدينا إذن :

$$f(a_i) = b_1\,\alpha_{i1} + \ldots + b_q\,\alpha_{iq}$$

$$g(a_i) = b_1\,\beta_{i1} + \ldots + b_q\,\beta_{iq}$$

لنضع $h = f + g$ ولنرمز لمصفوفة h بالنسبة للأساسين المعتبرين بِـ :

$$C = (\gamma_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q}$$

لدينا حينئذ :

$$\begin{aligned} h(a_i) &= f(a_i) + g(a_i) \\ &= b_1(\alpha_{i1} + \beta_{i1}) + \ldots + b_q\,(\alpha_{iq} + \beta_{iq}) \end{aligned}$$

وبالتالي تكون حدود C معطاة بالعلاقات :

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \qquad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q) \tag{1}$$

وهكذا إذا كانت لدينا مصفوفتان $A = (\alpha_{ij})$ وَ $B = (\beta_{ij})$ ذات معاملات في K فإن **مجموع** A وَ B هي المصفوفة $C = (\gamma_{ij})$ المعطاة بالعلاقة (1)؛ نرمز لهذا المجموع بِـ $A + B$.

نشير إلى أن مجموع مصفوفتين لا يكون معرفاً إلاّ إذا كان عددا سطورهما متساويين وعددا أعمدتهما متساويين أيضاً.

لو نطابق مصفوفة $(\alpha_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q}$ بعنصر من K^{pq} يتضح أن جمع المصفوفات يعود إلى جمع عناصر من K^{pq} . وعليه فإن مجموعة المصفوفات

المكونة من p عمود وَ q . سطر زمرة تبديلية عند تزويدها بقانون التركيب :

$$(A, B) \to A + B$$

ومن جهة أخرى يتبين مما سبق أن لدينا النتيجة التالية :

نظرية 2 - ليكن L وَ M مقياسين حرين ومن صنف منته على K ، وليكن f وَ g تماثلين من L في M ، و A وَ B مصفوفتي f وَ g بالنسبة لأساس (a_i) لِـ L وأساس (b_j) لِـ M . عندئذ تكون مصفوفة $f + g$ بالنسبة لهذين الأساسين هي $A + B$.

نشير أخيراً إلى أنه بالإمكان النظر لمجموعة المصفوفات المكونة من p عمود و q سطر والتي تنتمي معاملاتها لِـ K ، كزمرة جمعية وكذلك كمقياس على اليسار (أو على اليمين) على K ؛ ويكفي لذلك تعريف العبارتين λA وَ $A\lambda$ بالدستورين $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$ وَ $A\lambda = (\alpha_{ij} \lambda)$ حيث يرمز A للمصفوفة $A = (\alpha_{ij})$.

ف 14. جداء المصفوفات

1. حلقة التماثلات الداخلية لمقياس

نبين أولاً النتيجة التالية :

نظرية 1 - ليكن L ، M ، N ثلاثة مقاييس ، ولتكن التماثلات الثالية :

$$f, g : L \to M$$
$$h : M \to N$$

لدينا العلاقة :

$$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

باعتبار التماثلات التالية :

$$f : L \to M$$
$$g, h : M \to N$$

تصبح لدينا العلاقة :

$$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

نثبت مثلا العلاقة الأولى . من أجل ذلك نضع $u = f + g$ فنجد :

$$h \circ u\ (x) = h[u(x)] = h[f(x) + g(x)]$$
$$= h[f(x)] + h[g(x)]$$

وهذا ما يبين أن التطبيق $h \circ u$ مجموع للتطبيقين $h \circ f$ وَ $h \circ g$ ، ومنه النظرية .

نتيجة - ليكن L مقياساً على حلقة؛ إن المجموعة $\text{Hom}(L, L)$ المؤلفة من التماثلات الداخلية للمقياس L تصبح حلقة عند تزويدها بقانوني التركيب:

$$(f, g) \to f + g$$
$$(f, g) \to f \circ g$$

$\text{Hom}(L, L)$ زمرة تبديلية عندما تزود بقانون الجمع، حسب النظرية 1 من ف 13. كما يستنتج من النظرية 2، ف 2 أن الضرب قانون تجميعي؛ وبما أن التطبيق المطابق j_L ينتمي إلى $\text{Hom}(L, L)$ فهذا يثبت وجود العنصر المحايد. أخيراً يتضح من النظرية 1 أن شروط «شروط التوزيع» متوفرة، وبهذا ينتهي البرهان.

تسمى المجموعة $\text{Hom}(L, L)$ عند تزويدها بالقانونين السالفين الذكر، **حلقة التماثلات الداخلية للمقياس** L. وهي حلقة غير تبديلية عموماً (حتى ولو كانت حلقة الأساس K تبديلية) كما سنرى ذلك.

2. جداء مصفوفتين

لتكن L، M، N مقاييس على اليمين، حرة ومن صنف منته؛ نختار أسس $(a_1, \dots, a_p)$، $(b_1, \dots, b_q)$ وَ $(c_1, \dots, c_r)$ لهذه المقاييس. نعتبر الآن التماثلين:

$$f : M \to N$$
$$g : L \to M$$

والتماثل المركب:

$$h = f \circ g : L \to N$$

نرمز لمصفوفة f بالنسبة للأساسين (b_j) وَ (c_k) بـ:

$$A = (\alpha_{jk})_{1 \leq j \leq q,\, 1 \leq k \leq r}$$

ولمصفوفة g بالنسبة للأساسين (a_i) وَ (b_j) بـ:

$$B = (\beta_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

ولمصفوفة h بالنسبة للأساسين (a_i) وَ (c_k) بِـ:

$$C = (\gamma_{ik})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq k \leq r}$$

هدفنا الآن هو حساب C بدلالة A وَ B.

ليكن:

$$x = a_1 \xi_1 + \ldots + a_p \xi_p$$

عنصراً من L؛ نضع:

$$g(x) = y = b_1 \eta_1 + \ldots + b_q \eta_q$$
$$h(x) = f(y) = c_1 \zeta_1 + \ldots + c_r \zeta_r$$

إن معرفتنا للمصفوفتين A وَ B لِـ f وَ g تجعلنا نستنتج من الدساتير (6) الواردة في الفقرة 3 من ف 12:

$$\zeta_k = \alpha_{1k} \eta_1 + \ldots + \alpha_{qk} \eta_q \qquad (1 \leq k \leq r)$$

$$\eta_j = \beta_{1j} \xi_1 + \ldots + \beta_{pj} \xi_p \qquad (1 \leq j \leq q)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \zeta_k = {} & \alpha_{1k}(\beta_{11} \xi_1 + \ldots + \beta_{p1} \xi_p) \\ & + \alpha_{2k}(\beta_{12} \xi_1 + \ldots + \beta_{p2} \xi_p) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha_{qk}(\beta_{1q} \xi_1 + \ldots + \beta_{pq} \xi_p) \end{aligned}$$

لكن المصفوفة $C = (\gamma_{ik})$ لِـ h معطاة أيضاً بالدساتير:

$$\zeta_k = \gamma_{1k} \xi_1 + \ldots + \gamma_{pk} \xi_p$$

بمقارنة النتائج التي حصلنا عليها آنفاً نستنتج العلاقات:

$$\gamma_{1k} = \alpha_{1k} \beta_{11} + \alpha_{2k} \beta_{12} + \ldots + \alpha_{qk} \beta_{1q}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_{pq} = \alpha_{1k} \beta_{p1} + \alpha_{2k} \beta_{p2} + \ldots + \alpha_{qk} \beta_{pq}$$

التي يمكن أن نكتبها على الشكل المختصر التالي :

$$\gamma_{ik} = \alpha_{1k}\,\beta_{i1} + \ldots + \alpha_{qk}\,\beta_{iq} = \sum_{j=1}^{j=q} \alpha_{jk}\,\beta_{ij} \tag{1}$$

تؤدي بنا هذه النتيجة إلى وضع التعريف التالي :

لتكن :

$$B = (\beta_{ij})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq q} \text{ ، } A = (\alpha_{jk})_{1\leq j\leq q,\, 1\leq k\leq r}$$

مصفوفتين ذات معاملات في الحلقة K ، **جداء** A وَ B هو ، تعريفاً ، المصفوفة :

$$AB = (\gamma_{ik})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq k\leq r}$$

التي تعطى معاملاتها بالعلاقات (1) .

نشير إلى أن الجداء AB لا يكون معرفاً إلاّ إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد سطور B ، ويكون عندئذ عدد سطور المصفوفة AB يساوي عدد سطور A وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة B .

من الواضح الآن ، وبعد هذا التعريف ، أنه بإمكاننا تقديم النتيجة التالية :

نظرية 2 - ليكن L ، M ، N ثلاثة مقاييس حرة ومن صنف منته على K ، ولتكن (a_i) ، (b_j) ، (c_k) أسساً لِـ L ، M ، N وَ $f: M\to N$ وَ $g: L\to M$ تماثلين . نرمز بِـ A لمصفوفة f بالنسبة للأساسين (b_j) وَ (c_k) وَ بِـ B لمصفوفة g بالنسبة للأساسين (a_i) وَ (b_j) . عندئذ تكون مصفوفة $f\circ g$ بالنسبة للأساسين (a_i) وَ (c_k) هي AB .

نسوق فيما يلي بعض الأمثلة لضرب المصفوفات .

مثال 1 - نأخذ : $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ وَ $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$

إن الجداء AB معرف وهو يساوي مصفوفة ذات سطر واحد وعمود واحد ، أي أنها من الشكل (γ) حيث γ عدد سلمي ؛ تعطى العلاقة (1) :

$$\gamma = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_q \beta_q$$

نقول في هذه الحالة ، لأسباب واضحة أن العدد السلمي γ يساوي جداء «السطر» A و «العمود» B .

تسمح هذه النتيجة بتذكر القاعدة العامة الخاصة بضرب المصفوفات ؛ ذلك أننا نستطيع كتابة العلاقة (1) ، بتبني الاصطلاحات التي عرضناها آنفاً ، على الشكل التالي :

$$\gamma_{ik} = (\alpha_{1k}, \dots \alpha_{qk}) \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{iq} \end{pmatrix}$$

وهذا يعني أن الحدود الواقعة في السطر K من المصفوفة AB ، نحصل عليها بضرب السطر K من A في أعمدة B . تلك هي القاعدة التي نستعملها دوماً من الناحية العملية .

مثال 2 – يعرف جداء مصفوفتين مربعتين من الرتبة 2 ، بالدستور :

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a'' + b'c'' & a'b'' + b'd'' \\ c'a'' + d'c'' & c'b'' + d'd'' \end{pmatrix}$$

فإذا كان y, x مثلاً عددين حقيقيين ، فإن :

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار ما ورد في المثال 1 من ف 12 نجد أن النتيجة السابقة تنص على أن تركيب الدورانين حول النقطة 0 المعرفيْن بزاويتيهما x وَ y (في المستوى) يساوي الدوران حول النقطة 0 المعرف بزاويته $x + y$.

مثال 3 – من أجل كل حلقة K وعدد صحيح $1 \le n$ ، نعتبر المصفوفة :

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

المؤلفة من n سطر و n عمود؛ تسمى هذه المصفوفة **المصفوفة الواحدية من الرتبة** n . لتبرير هذا المصطلح نلاحظ أن من أجل كل مصفوفتين X وَ Y معاملاتهما في K ، نتأكد بسهولة من صحة العلاقتين:

$$\Lambda_n \cdot X = X; \qquad Y \cdot \Lambda_n = Y$$

(شرط أن يكون لهما معنى، أي عندما يحتوي X على n سطر و Y على n عمود) . يمكن الحصول على هذين العلاقتين بكل سهولة انطلاقاً من الدساتير (1) ، أما تفسيرهما الهندسي فهو كالتالي: ليكن L مقياساً على اليمين ومن صنف منته على K ، ونفرض أن لِـL أساساً $(a_i)_{1 \le i \le n}$ يتشكل من n شعاع (باستطاعتنا أخذ $L = K^n$ مثلاً واعتبار الأساس القانوني) ؛ عندئذ يكون التماثل الداخلي $j: L \to L$ الممثل بالمصفوفة Λ_n بالنسبة للأساس (a_i) هو بالضبط التطبيق المطابق من L في L ، كما يتضح من خلال الدساتير (6) من الفقرة 3، ف 12 ومن كوْن لدينا هنا:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$$

إذا أردنا، بعد هذا، إثبات العلاقة $\Lambda_n X = X$ مثلاً ندخل مقياساً ثانياً M وأساساً له (b_j) والتماثل $f: M \to L$ الذي تمثله المصفوفة X بالنسبة للأساسين المعتبرين؛ عندئذ تبيِّن النظرية 1 أن $\Lambda_n X$ هي مصفوفة التماثل $j \circ f$ بالنسبة لهذين الأساسين؛ لكن لما كان $j = j_L$ فإن $j \circ f = f$ ، ومنه تأتي العلاقة المطلوبة .

3. حلقات المصفوفات

ان عمليتي جمع وضرب المصفوفات التي عرفناهما ضمن هذا الفصل وسابقه، تخضع – في حالة ما إذا كان لهذين العمليتين معنى – لقواعد

الحساب العامة. كنا تأكدنا من ذلك فيما يخص الجمع (الفقرة 2، ب 13).
أما فيما يخص الضرب فلدينا علاقة التجميع:

$$A(BC) = (AB)C$$

كلما كان الطرفان معرفين؛ لندرك ذلك ندخل التماثلات:

$$f : K^r \to K^s \ ; \ g : K^q \to K^r \ ; \ h : K^p \to K^q$$

الممثلة بالمصفوفات A، B، C (بالنسبة للأسس القانونية)؛ حينئذ وحسب النظرية 2، تكون المصفوفة $A(BC)$ ممثلة بالتماثل $f\circ(g\circ h)$، بَينما يمثل $(AB)C$ التماثل $(f\circ g)\circ h$، ومنه النتيجة المطلوبة.

أخيراً لدينا علاقات التوزيع:

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

التي نبينها، مثل دستور التوزيع، بتعويض A، B، C بتماثلات مقاييس، وبتطبيق النظرية 1.

بصفة خاصة، مهما كان العدد الصحيح $n \geq 1$ والحَلقة K، نرمز بِـ:

$$M_n(K)$$

لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة n (أي التي لها n سطراً و n عموداً) التي معاملاتها تنتمي إلى K؛ لدينا على هذه المجموعة قانونا التركيب:

$$(A, B) \to A + B \quad , \quad (A, B) \to AB$$

تصبح $M_n(K)$ حلقة عند تزويدها بقانوني التركيب السابقين. نحن نعلم أن $M_n(K)$ زمرة تبديلية بالنسبة للجمع؛ ومن جهة أخرى بينّا آنفاً أن الضرب قانون تجميعي، ومن الواضح (أنظر المثال 3 أعلاه) أنه يقبل عنصراً محايداً وهو Λ_n، أخيراً تبين الدساتير السابقة أن الضرب قانون توزيعي بالنسبة للجمع في $M_n(K)$.

نقول عن $M_n(K)$ أنها حلقة المصوفات من الرتبة n والتي معاملاتها في

K . من الواضح أن الحلقة $M_n(K)$ متشاكلة مع حلقة التماثلات الداخلية للمقياس على اليمين K^n على K (أو لأي مقياس يقبل أساساً يتألف من n شعاع) .

لا يمكن أن تكون الحلقة $M_n(K)$ تبديلية في حالة $n \leq 2$، حتى ولو كانت K تبديلية ؛ لرؤية ذلك في حالة $n = 2$ يكفي الملاحظة بأن :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بينما :

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لو كانت $M_2(K)$ تبديلية لوجدنا عندئذ $xy = y$ مهما كان x ، y في K ، وهو ما يصعب وقوعه عندما يضم K عنصرين على الأقل .

من الطبيعي أن تكون الحلقات $M_n(K)$ هي التي قدمت، تارخياً، الأمثلة الأولى للحلقات غير التبديلية .

نقول، كما هو الحال في كل حلقة، أن مصفوفتين مربعتين من الرتبة n ، X وَ Y **يتبادلان** أو أنهما **متبادلان** إذا تحققت العلاقة :

$$XY = YX$$

مثال 4 – نأخذ X **المصفوفة القطرية** أي المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0, & \dots x_n \end{pmatrix}$$

ولنبحث عن الشرط الذي يجعل مصفوفة $Y = (y_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ تتبادل مع X ؛ نبين بسهولة بالحساب المباشر أن :

$$XY = (x_i \; y_{ij}), \; YX = (y_{ij} \; x_j)$$

وبالتالي يجب ويكفي أن يكون :

$$x_i y_{ij} = y_{ij} x_j \ ; \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n$$

نفرض أن K حلقة تامة تبديلية وأن الحدود x_i التي تكوّن X مختلفة مثنى مثنى ؛ يُبين الشرط السابق الذي يكتب على النحو :

$$(xi - x_j) y_{ij} = 0$$

أن $y_{ij} = 0$ لما $i \neq j$ ، وكل ذلك لأن K تبديلية وتامة ولأن $x_i \neq xj$ لما $i \neq j$ ؛ تعني هذه النتيجة أن Y مصفوفة قطرية ؛ ومن جهة أخرى فإن هذا الشرط كاف لأن كل مصفوفتين قطريتين يتبادلان دوماً كما يبين ذلك الحساب السابق، عندما تكون معاملاتهما في حلقة تبديلية K .

4. الكتابة المصفوفية للتماثلات

ليكن L وَ M مقياسيين على اليمين حرين ومن صنف منته ، وليكن f تماثلاً من L في M . نختار أساساً $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L وأساساً $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ لِـ M ونرمز بِـ :

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

لمصفوفة f بالنسبة للأساسيين المعتبرين . نعتبر الشعاع الكيفي :

$$x = a_1 \xi_1 + \dots + a_p \xi_p$$

ومنه نحسب :

$$f(x) = b_1 \eta_1 + \dots + b_q \eta_q$$

فنجد أنه معطى بالعلاقات :

$$\eta_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \dots + \alpha_{p1} \xi_p$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta_q = \alpha_{1q} \xi_1 + \dots + \alpha_{pq} \xi_p$$

التي نستطيع كتابتها على النحو :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{p1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{1q} & & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_q \end{pmatrix}$$

أي أننا إذا طابقنا كل عنصر x من L بالمصفوفة العمودية المكونة من إحداثيات x بالنسبة للأساس (a_i) لِـ L ؛ وكل عنصر y من M بالمصفوفة العمودية المكوَّنة من إحداثيات y بالنسبة للأساس (b_j) لِـ M ، تصبح العلاقة :

$$y = f(x)$$

بين الشعاعيين x وَ y مكافئة للعلاقة :

$$y = Ax$$

بين المصفوفتين x وَ y . تسمح هذه النتيجة بإجراء الحسابات بصفة شبه آلية إذا تعلق الأمر بتماثلات مقاييس حرة ومن صنف منته .

ف 15. المصفوفات القابلة للقلب وتغييرات الأسس

1. زمرة التماثلات الذاتية لمقياس

نذكر (الفقرة 1 ، ف 12) أن تماثلاً ذاتياً لمقياس M هو كل تماثل تقابلي من M في M ، أي كل تشاكل من M على M . إذن فإن التماثلات الذاتية لِـ M هي بصفة خاصة تبديلات للمجموعة M ؛ ومن ناحية أخرى تبين النظرية 1 من ف 12 أن التطبيق $u \circ v^{-1}$ تماثل ذاتي لِـ M في حالة ما إذا كان u وَ v تماثلين ذاتيين لِـ M ؛ وبالتالي يتضح أن المجموعة :

$$GL(M)$$

المؤلفة من التماثلات الذاتية للمقياس M زمرة جزئية من الزمرة $\mathscr{G}(M)$ المؤلفة من تبديلات المجموعة M ؛ نقول إن $GL(M)$ **زمرة التماثلات الذاتية** للمقياس M أو إنها **الزمرة الخطية للمقياس** M . إن الدور الذي لعبته الزمر الشبيهة بِـ $GL(M)$ وكذلك زمرها الجزئية ، دور أساسي في تطور النظرية العامة للزمر .

نلاحظ أنه بالإمكان تعريف الزمرة $GL(M)$ إنطلاقاً من الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ المؤلفة من التماثلات الداخلية للمقياس M ؛ من البديهي أن :

$$GL(M) \subset \text{Hom}(M, M)$$

أما عناصر $GL(M)$ فهي عناصر الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ التي تقبل القلب ؛ لرؤية ذلك نفرض أن u تماثل داخلي يقبل القلب في الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ ، يوجد حينئذ تماثل داخلي v بحيث $u \circ v = v \circ u = j_M$ ، وبالتالي فإن u تقابلي ، وينتمي إذن لِـ $GL(M)$ ؛ أما القضية العكسية فهي بديهية .

ختاماً، نرى أن $GL(M)$ عبارة عن زمرة عناصر الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ القابلة للقلب وذلك بالمفهوم الوارد في الملاحظة 1 من ف. 8.

2. الزمر $GL(n, K)$.

نقول عن مصفوفة $U \in M_n(K)$ إنها تقبل القلب إذا وجدت مصفوفة $V \in M_n(K)$ بحيث:

$$UV = VU = \Lambda_n$$

أي إذا كان U عنصراً قابلاً للقلب من الحلقة $M_n(K)$؛ فإن المصفوفة V وحيدة ويرمز لها بـ: U^{-1} وتسمى **مقلوبة** U. نرمز بـ:

$$GL(n, K)$$

لمجموعة المصفوفات المربعة القابلة للقلب ذات الدرجة n ومن معاملات في K؛ إذا زودنا هذه المجموعة بقانون التركيب $(U, V) \to UV$، تصبح زمرة وتسمى **الزمرة الخطية من n متغير على الحلقة K**، وما هي في الحقيقية سوى الزمرة الضربية لعناصر الحلقة $M_n(K)$، التي تقبل القلب.

ليكن M مقياساً حراً من صنف منته، نختار أساساً $a_1, ..., a_n$ لـ M؛ نستطيع أن نلحق بكل تماثل داخلي f لـ M مصفوفته بالنسبة للأساس المعتبر (الفقرة 3، ف. 12)؛ نرمز لهذه المصفوفة بـ: $A(f)$ فنحصل على تقابل:

$$f \to A(f)$$

من الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ على الحلقة $M_n(K)$ المكونة من المصفوفات المربعة من الرتبة n والتي معاملاتها في K، هذا وتبين كيفية تعريف مجموع وجداء مصفوفتين، صحة العلاقات:

$$A(f + g) = A(f) + A(g) \quad , \quad A(fg) = A(f)\, A(g), A(j_M) = \Lambda_n$$

وهذا يعني أن التطبيق $f \to A(f)$ تشاكل (الفقرة 6، ف. 8) من الحلقة $\text{Hom}(M, M)$ على الحلقة $M_n(K)$.

لما كان كل تشاكل من حلقة U على حلقة V يطبق المجموعة U^* المؤلفة من عناصر U القابلة للقلب على المجموعة V^* المؤلفة من عناصر V القابلة للقلب ، فإننا نستنتج أن الشرط اللازم والكافي ليكون تماثل داخلي f لِـ M تماثلاً ذاتياً لِـ M هو أن تكون مصفوفته $A(f)$ عنصراً قابلاً للقلب في الحلقة $M_n(K)$ ؛ بعبارة أخرى هناك تكافؤ بين الكتابتين : $f \in GL(M)$ وَ $A(f) \in GL(n, K)$

إذا طابقنا $M_n(K)$ بحلقة التماثلات الداخلية للمقياس على اليمين K^n على K ، كما أشرنا لذلك في الفقرة 3 من ف . 14 فإننا نرى بأن $GL(n, K)$ يطابق حينئذ زمرة التماثلات الذاتية لِـ K^n ، أي زمرة التطبيقات :

$$(\xi_1, ..., \xi_n) \to (\eta_1 ..., \eta_n)$$

من K^n في K^n التقابلية والخطية ، وهي تطبيقات تعطى بدساتير من الشكل :

$$\eta_j = \alpha_{1j}\,\xi_1 + ... + \alpha_{nj}\,\xi_n \qquad (1 \leq j \leq n)$$

3. أمثلة : الزمرتان $GL(1, K)$ وَ $GL(2, K)$.

إذا كان $n = 1$ فإن الحلقة $M_n(K)$ مطابقة للحلقة K نفسها ، وبالتالي فإن الزمرة $GL(1, K)$ هي الزمرة الضربية K^* المكونة من العناصر القابلة للقلب في K .

لدراسة الزمرة $GL(2, K)$ ، نفرض أن K تبديلية . لكي تقبل مصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مقلوبة :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

لا بد من وجود عناصر x ، y ، z ، t من K تحقق :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

أي تحقق المعادلات :

$$(2) \qquad \begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} az + bt = 0 \\ cz + dt = 1 \end{cases}$$

لإيجاد شروط ضرورية وكافية لحل المعادلات (2)، ندخل مفهوم معين مصفوفة مربعة من الرتبة 2 وذات معاملات في الحلقة التبديلية K : بالنسبة لمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} c & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

يسمى العدد السلمي $ad - bc$ معين المصفوفة ونرمز له بِـ : $dét(A)$ أو بِـ :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

سنعمم فيما بعد هذا التعريف ليشمل كل المصفوفات المربعة من رتبة n كيفية.

يكفينا هنا أن نعلم بأن :

$$dét(AB) = dét(A) \cdot dét(B)$$

مهما كان A، B في $M_2(K)$ ؛ إن هذه العلاقة تكافىء بالفعل المساواة :

$$(ad - bc)(xt - yz) = (ax + by)(cz + dt) - (az + bt)(cx + dy)$$

التي يستطيع القارئ التأكد منها بسهولة عندما يأخذ بعين الاعتبار كوْن K تبديلية.

بعد هذا، وبما أن معين المصفوفة الواحدية 1_2 يساوى 1 فإن العلاقة :

$$dét(A) \cdot dét(A^{-1}) = 1$$

تثبت أن قابلية A للقلب تقتضى أن يكون معينها يقبل القلب. لننظر الآن للقضية العكسية ونفرض أن $ad - bc$ يقبل القلب ؛ نعتبر في الجملة (2) المعادلتين اللتين تتعلقان بِـ x وَ y، إنهما تتحققان عندما نأخذ :

$$x = (ad - bc)^{-1} d$$
$$y = (ad - bc)^{-1} c$$

وتكون المعادلتان المتبقيتان محققتين من أجل :

$$z = (ad - bc)^{-1} b$$
$$t = (ad - bc)^{-1} a$$

نتأكد بسهولة أن المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

التي نحصل عليها بهذه الطريقة هي مقلوبة A على اليمين وعلى اليسار.

ختاماً، إذا كانت K حلقة تبديلية، فإن المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ تقبل القلب إذا وفقط إذا كان $ad - bc$ يقبل القلب في K.

إذا كان K مثلاً حقلاً تبديلياً، فإن $GL(2, K)$ مؤلفة من المصفوفات $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ التي تحقق :

$$ad - bc \neq 0$$

وعلى العكس من ذلك فإن الزمرة $GL(2, \mathbf{Z})$ مؤلفة من المصفوفات $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ذات معاملات في $\mathbf{Z}$ بحيث :

$$ad - bc = +1$$

أو

$$ad - bc = -1$$

ملاحظة 1 - لتكن L حلقة وَ K حلقة جزئية من L، بإمكاننا اعتبار $M_n(K)$ حلقة جزئية من $M_n(L)$. وقد يحدث أن تكون مصفوفة $U \in M_n(K)$ قابلة للقلب في الحلقة $M_n(L)$ دون أن تكون كذلك في الحلقة $M_n(K)$:

وهكذا نلاحظ أن المصفوفة (2) أو المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **تقبل القلب عندما ننظر إليها كمصفوفة ذات معاملات في الحقل** $\mathbf{Q}$، وهي لا تقبل القلب عندما

ننظر إليها كمصفوفة ذات معاملات في الحلقة $\mathbf{Z}$. يتضح إذن أن وقوع إشكال في مفهوم المصفوفات القابلة للقلب غير مستبعد إذا لم نحدد حلقة الأساس المختارة.

لكن هذا النوع من الاشكال لا يحدث عندما تكون حلقة الأساس حقلاً؛ بعبارة أخرى، ليكن L حقلاً و K حقلاً جزئياً من L، فإذا كانت مصفوفة $U \in M_n(K)$ قابلة للقلب في الحلقة $M_n(L)$ فهي كذلك أيضاً في الحلقة $M_n(K)$. أنظر برهانا على ذلك في التمرين 20، ف 20؛ نستطيع أيضاً استخدام النتيجة 1 للنظرية 18 من ف. 23 في حالة ما إذا كانت L تبديلية.

4. تغيرات الأسس: مصفوفات الإنتقال

ليكن M مقياساً على اليمين حراً ومن صنف منته، على K، ولنعتبر أساسين $(a_1, ..., a_n)$ وَ $(b_1, ..., b_n)$ لِـ M لهما عدد من العناصر يساوي n [إن هذا الشرط محقق دوماً في الحالة التي يكون فيها K حقلاً (النظرية 6، ف. 19) أو حلقة تبديلية (نتيجة النظرية 3، ف 23)]. هدفنا الآن هو حساب إحداثيات x بالنسبة للأساس الثاني وذلك بدلالة إحداثياته بالنسبة للأساس الأول من أجل كل x في M.

من أجل ذلك نعتبر التماثلين:

$$u, v : K^n \to M$$

المعطيين بِـ:

$$\begin{cases} u(e_i) = a_i \\ v(e_i) = b_i \end{cases} \qquad (1 \le i \le n) \qquad (3)$$

حيث يرمز $e_1, ..., e_n$ للأساس القانوني لِـ K^n. حتى يكون (a_i) وَ (b_i) أساسين لِـ M يلزم ويكفي أن يكون u وَ v تشاكلين (النتيجة 1 من النظرية 3، ف. 12)؛ إذا رمزنا بعد ذلك بِـ $\xi_1, ..., \xi_n$ لإحداثيات x بالنسبة

للأساس (a_i) وبـ : $\eta_1, ..., \eta_n$ لإحداثياته بالنسبة للأساس (b_i) نحصل على العلاقة :

$$x = u(\xi_1, ..., \xi_n) = v(\eta_1, ..., \eta_n)$$

وبإدخال التشاكل الذاتي (النظرية 1، ف. 12) التالي :

$$w = v^{-1} \circ u \tag{4}$$

لِـ K^n، نجد إذن :

$$(\eta_1, ..., \eta_n) = w(\xi_1, ..., \xi_n)$$

لنرمز بـ : $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ لمصفوفة w بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^n، عندئذ نحصل على الدساتير :

$$\eta_j = \alpha_{1j} \xi_1 + ... + \alpha_{nj} \xi_n \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{5}$$

التي تحل المسألة المطروحة تسمى هذه العلاقات **دساتير تغيير الإحداثيات** وتسمى المصفوفة (α_{ij}) الواردة في هذه الدساتير **مصفوفة الانتقال من الأساس** $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ **إلى الأساس** $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$. بما أن هذه المصفوفة تمثل تشاكلا ذاتياً لِـ K^n فإن :

$$(\alpha_{ij}) \in GL(n, K)$$

نلاحظ أن العلاقة (4) تكتب أيضاً على النحو : $u = v \circ w$ وتستوجب إذن :

$$v = u \circ w^{-1} \tag{6}$$

نرمز بـ $\beta_{ij} = (\alpha_{ij})^{-1}$ لمصفوفة w^{-1} (بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^n) وهي مصفوفة تساوي حتماً مقلوبة مصفوفة الانتقال (α_{ij})؛ لدينا العلاقات :

$$w^{-1}(e_i) = e_1 \beta_{i1} + ... + e_n \beta_{in}$$

وبمراعاة (3) يأتي :

$$b_i = v(e_i) = u[w^{-1}(e_i)] = u(e_1 \beta_{i1} + ... + e_n \beta_{in})$$

$$= u(e_1)\beta_{i1} + ... + u(e_n)\beta_{in}$$

أي أن :

$$b_i = a_1 \beta_{i1} + \dots + a_n \beta_{in} \quad (1 \leq i \leq n) \tag{7}$$

ينبغي أن نلاحظ عدم تطابق المصفوفتين (α_{ij}) وَ (β_{ij}) الظاهرتين في العلاقات (5) و (7)، بل إن الواحدة منهما مقلوبة الأخرى.
كما نبين بحساب مماثل العلاقات :

$$a_i = b_1 \alpha_{i1} + \dots + b_n \alpha_{in} \qquad \text{(7 مكرر)}$$

ملاحظة 2 - أبسط حالة هي تلك التي يكون فيها $n = 1$؛ لدينا حينئذ أساسان (a) وَ (b) يضم كل منهما شعاعاً وحيداً، والعلاقة :

$$x = a\xi = b\eta$$

بوضع :

$$\eta = \alpha\xi$$

يجب أن نجد : $a\xi = b\alpha\xi$ مهما كان ξ، إذن : $a = b\alpha$، وبالتالي :

$$b = a\alpha^{-1}$$

بعبارة أخرى إذا عوضنا شعاع الأساس a بالشعاع $a\alpha$، فإن الإحداثية ξ لِـ x تعوض بِـ : $\alpha^{-1}\xi$ وهذا أمر معقول لأن الجداء $a\xi$ لا بد أن يبقى ثابتاً !

تسمح النتائج السابقة بإنشاء كل أسس M إنطلاقاً من أساس كيفي له :

نظرية 1 - ليكن $a_1, \dots, a_n$ أساساً لمقياس M على اليمين، على K. إن الشرط اللازم والكافي لتشكل الأشعة :

$$b_i = a_1 \beta_{i1} + \dots + a_n \beta_{in} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

أساساً لِـ M هو أن تكون المصفوفة $(\beta_{in})_{1 \leq i, j \leq n}$ قابلة للقلب في الحلقة $M_n(K)$.

لإثبات ذلك نعتبر التماثلين $u, v : K^n \to M$ المعطيين بالدساتير (3)؛ نحن نعلم أن u تقابل؛ ذلك أن العناصر (a_i) تشكل أساساً. للتعبير على أن

العناصر (b_i) تشكل أساساً ينبغي التعبير على أن v تقابل، وهذا يرجع بطبيعة الحالة إلى القول أن $u^{-1} \circ v$ تشاكل ذاتي لِـ K^n، لكن:

$$u^{-1} \circ v(e_i) = u^{-1}(b_i) = u^{-1}(a_1 \beta_{i1} + \dots + a_n \beta_{in})$$

$$= u^{-1}(a_1) \beta_{i1} + \dots + u^{-1}(a_n) \beta_{in}$$

$$= e_1 \beta_{i1} + \dots + e_n \beta_{in}$$

ومنه يأتي أن مصفوفة التماثل الداخلي $u^{-1} \circ v$ لِـ K^n هي بالضبط (β_{ij})؛ وهكذا ينتهي برهان النظرية لأن الشرط اللازم والكافي حتى يكون تماثل داخلي لِـ K^n تقابلاً هو أن تكون مصفوفته في $GL(n, K)$.

يمكن الحصول على شرط النظرية 1 بإدخال التماثل الداخلي f لِـ M المعرف بِـ:

$$f(a_i) = b_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

(نستنتج وجوده من النظرية 3، ف. 13)؛ إن الشرط اللازم والكافي ليشكل (b_i) أساساً لِـ M هو أن يكون f تشاكلاً ذاتياً لِـ M (النتيجة 1 للنظرية 3، ف. 12)؛ لكن المصفوفة (β_{ij}) هي مصفوفة f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ M.

من جهة ثانية نلاحظ أن هذه النتيجة نستطيع الحصول عليها مباشرة ذلك أننا عندما ندخل من جديد التماثلين u وَ v الواردين أعلاه نستنتج:

$$f = v \circ u^{-1}$$

وبما أن u تقابل فإن القول بأن v تقابل يعني تماماً أن f تقابل...

5. تأثير تغيير الأسس على مصفوفة تماثل.

ليكن L وَ M مقياسين على اليمين حرين ومن صنف منته وَ $f: L \to M$ تماثلاً. ليكن:

أ

$$(a'_1, \ldots, a'_p)$$

وَ

$$(a''_1, \ldots, a''_p)$$

أساسين لِـ L عددا عناصرهما متساويان لِـ p، وليكن:

$$(b'_1, \ldots, b'_q)$$

$$(b''_1, \ldots, b''_q)$$

أساسين لِـ M عددا عناصرهما مساويان لِـ q. نرمز بِـ A' لمصفوفة f بالنسبة للأساسين (a'_i) وَ (b'_j) وبِـ: A'' لمصفوفته بالنسبة للأساسين (a''_i) وَ (b''_j). نريد الآن حساب A'' بدلالة A' وبدلالة المصفوفة:

$$U \in GL(p, K)$$

التي تنقل من الأساس (a'_i) إلى الأساس (a''_i)، وبدلالة المصفوفة:

$$V \in GL(q, K)$$

التي تنقل من الأساس (b'_j) إلى الأساس (b''_j).

من أجل ذلك نعتبر التماثلين: $u', u'' : K^p \to L$ اللذين يطبقان الأساس القانوني لِـ K^q على الأساسين a'_i (بالنسبة لِـ u') وَ a''_i (بالنسبة لِـ u'')، والتماثلين $v', v'' : K^q \to M$ اللذين يطبقان الأساس القانوني لِـ K^q على الأساسين (b'_j) وَ (b''_j) لِـ M. لدينا العلاقتان $u' = u'' \circ u$ وَ $v' = v'' \circ v$ حيث u (v بالترتيب) تشاكل ذاتي لِـ K^p (K^q بالترتيب) ممثل بمصفوفة بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^p (K^q بالترتيب) هي U (V بالترتيب) وهذا حسب الفقرة السابقة. من جهة أخرى إذا أدخلنا التماثلين:

$$f', f'' : K^p \to K^q$$

المعرفين بِـ:

$$f' = v'^{-1} \circ f \circ u'$$

$$f'' = v''^{-1} \circ f \circ u''$$

فإن المصفوفتين A' وَ A'' المعرفتين أعلاه هما مصفوفتا f' وَ f'' بالنسبة للأساسين القانونيين لِـ K^p وَ K^q حسب ف 12، الملاحظة 2. لكن إذا أدخلنا التطبيقين u وَ v المعرفين أعلاه يأتي:

$$f' = (v'' \circ v)^{-1} \circ f \circ (u'' \circ u)$$
$$= v^{-1} \circ v''^{-1} \circ f \circ u'' \circ u = v^{-1} \circ f'' \circ u$$

بما ان تركيب التماثلات يمثل بجداء مصفوفات هذه التماثلات فإننا نحصل على العلاقة التالية باعتبار مصفوفات u ، v ، f' ، f'' بالنسبة للأسس القانونية :

$$A' = V^{-1} \cdot A'' \cdot U$$

وهي العلاقة التي تحل المسألة المطروحة في بداية هذه الفقرة. وهكذا تأتي :

نظرية 2 - ليكن L وَ M مقياسين على اليمين، حرين ومن صنف منته على K : وليكن f تماثلاً من L في M ، وَ A' مصفوفة f بالنسبة لأساس $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L وأساس $(b'_j)_{1 \leq j \leq q}$ لِـ M ، ولتكن A'' مصفوفة f بالنسبة لأساس $(a''_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L وأساس $(b''_j)_{1 \leq j \leq q}$ لِـ M . نعتبر أخيراً مصفوفة الإنتقال U من الأساس (a'_i) إلى الأساس (a''_i)، ومصفوفة الإنتقال V من الأساس (b'_j) إلى الأساس (b''_j) . عندئذ تتحقق المساواة :

$$A' = V^{-1} A'' U$$

بصفة خاصة إذا كان $L = M$ نستطيع أن نفترض فيما سبق أن الأساس (b'_j) مطابق للأساس (a'_i)؛ والأساس (b''_j) مطابق للأساس (a''_i)، وهي الحالة التي نجد فيها $V = U$ ؛ إذن :

نتيجة - ليكن L مقياساً على اليمين حراً ومن صنف منته على K ، و f تماثلاً داخلياً لِـ L ، وَ $(a'_i)_{1 \leq i \leq p}$ وَ $(a''_i)_{1 \leq i \leq p}$ أساسين لِـ L عددا عناصرهما متساويان .

نرمز بِـ A' لمصفوفة f بالنسبة للأساس (a'_i) وبِـ A'' لمصفوفته بالنسبة للأساس (a''_i) . عندئذ تتحقق المساواة :

$$A'' = U A' \cdot U^{-1}$$

حيث U مصفوفة الإنتقال من الأساس (a'_i) إلى الأساس (a''_i) .

تؤدي هذه النتيجة إلى مفهوم هام وهو : نعتبر المصفوفتين A' ، A'' المنتميتين إلى $M_p(K)$ ، نقول عن A' وَ A'' أنهما **متشابهتان** (على حلقة الأساس K) إذا وجدت مصفوفة :

$$U \in GL(p, K)$$

بحيث تتحقق العلاقة :

$$A'' = U\, A'\, U^{-1}$$

ملاحظة 3 - يوجد دائماً (حسب النظرية 1) تغيير أساس تكون مصفوفة انتقاله مصفوفة قابلة للقلب نختارها كيفياً. ومنه يتضح أن النظرية 2 تقبل نتيجة عكسية : ليكن f تماثلاً ، وَ (a'_i) وَ (b'_j) أساسين ، وهذا يعرف المصفوفة A' ، عندئذ مهما كانت المصفوفتان :

$$GL(q, K) \ni V \text{ وَ } GL(p, K) \ni U$$

توجد في L وَ M أسس تجعل f ممثلاً بالمصفوفة $V^{-1} A' U$.

لدينا نتيجة مماثلة في الحالة التي يكون فيها $L = M$.

ملاحظة 4 - إن البرهان الذي قدمناه فيما يخص النظرية 2 قد تجنبنا فيه كل حساب صريح لكنه يتطلب ، بدل ذلك المرور على المقياسين «النموذجية» K^p وَ K^q وهو ما قد يحرج القارئ المبتدئ.

بإمكاننا أيضاً إثبات النظرية 2 كما يلي : لتكن U وَ V مصفوفتي الانتقال ، نضع :

$$U^{-1} = (w_{ij})_{1 \le i, j \le p}$$

$$V^{-1} = (\varrho_{kh})_{1 \le k, h \le q}$$

نستنتج من الفقرة 4 العلاقات :

$$a''_i = \sum_j a'_j\, w_{ij} \quad ; \quad b''_k = \sum_h b'_h\, \varrho_{kh} \qquad (8)$$

ومن جهة أخرى، بوضع :

$$A' = (\alpha'_{jh})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq h\leq q}$$

$$A'' = (\alpha''_{ik})_{1\leq i\leq p,\, 1\leq k\leq q}$$

يأتي :

$$f(a'_j) = \sum_h b'_h \alpha'_{jh} \quad ; \quad f(a''_i) = \sum_k b''_k \alpha''_{ik} \tag{9}$$

وبمراعاة (8) تعطى العلاقة الثانية من (9) :

$$\sum_j f(a'_j)\, w_{ij} = \sum_k \sum_h b'_h\, \varrho_{kh}\, \alpha''_{ik}$$

أو، حسب العلاقة الأولى من (9) :

$$\sum_j \sum_h b'_h\, \alpha'_{jh}\, w_{ij} = \sum_k \sum_h b'_h\, \varrho_{kh}\, \alpha''_{ik}$$

لما كانت الأشعة b'_h مستقلة خطياً، فإن معاملات الطرفين متساويان وهذا ما يؤدي إلى العلاقة :

$$\sum_j \alpha'_{jh}\, w_{ij} = \sum_k \varrho_{kh}\, \alpha''_{ik}$$

المحققة مهما كان i وَ h. لكن يظهر في الطرف الأول المعامل الذي يحمل الدليل h وَ i؛ والمنتمي إلى المصفوفة $A'U^{-1}$، ويظهر في الطرف الثاني المعامل الذي يحمل الدليل h وَ i، والمنتمي إلى المصفوفة $V^{-1}A''$؛ وبالتالي $A'U^{-1} = V^{-1}A''$ ومنه تأتي العلاقة المطلوبة : $A'' = VA'U^{-1}$.

كانت الحسابات من هذا النوع كثيرة في الجبر الخطي وفي نظرية «الوترات» وأدهشت بحق (وكان صواباً) العديد من الأشخاص الذين كانوا يعتقدون أن آنشتاين هو الوحيد الذي يستطيع فهم الأعمال التي أنجزها. ويفضل معظم الرياضيين اليوم تعويض العدد الهائل من الحروف والأرقام

المستعملة كدليل ببراهين هندسية أو بالأحرى تصورية التي لها الفضل في كوْنها أبسط من غيرها. إلاَّ أن معظم الفيزيائيين لا يزالوا يستعملون طرقاً مماثلة لتلك التي عرضناها ضمن هذه الملاحظة (وهذا أمر غريب، خاصة وأن الفيزيائي مطالب أكثر من الرياضي بأن يهتم بالكائنات «الهندسية» أو «الفيزيائية» بدل الإهتمام بإحداثياتها، هذا على الأقل، ما لم يقرر القيام بحسابات فعلية). وبالتالي فإنه من المفيد التعود على الأدلة والمجاميع Σ حتى ولو علمنا أن الإستغناء عنها ممكن نظرياً.

ف . 16. منقول تطبيق خطي

1. ثنوي مقياس

ليكن L مقياساً على اليمين على حلقة كيفية K . نذكر (المثال 3 في الفقرة 4 من ف 12) أننا نسمي شكلاً خطياً على L كل تماثل من L في المقياس K على اليمين على K ، أي كل تطبيق :

$$f : L \to K$$

يحقق :

$$f(x\alpha + y\beta) = f(x)\alpha + f(y)\beta \qquad (1)$$

مهما كان x ، y في L وَ α ، β في K . نرى من خلال ف 13 أن هذه الأشكال الخطية على L هي عناصر الزمرة التبديلية $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ ، أما مجموع شكلين خطين على L فهو تعريفاً التابع $f(x) + g(x)$.

سنرى (باستعمال خاصية K المتمثلة في أنه مقياس على اليمين وعلى اليسار في آن واحد) أننا نستطيع النظر إلى المجموعة $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ ليس فقط على أنها زمرة تبديلية بل على أنها مقياس على اليسار على K أيضاً . من أجل ذلك نعتبر شكلاً خطياً f على L وعدداً سلمياً λ في K ، ونعتبر على L التابع g المعطى بِـ :

$$g(x) = \lambda \cdot f(x)$$

بضرب العلاقة (1) في λ من اليسار ، وبمراعاة قواعد الحساب (التجميع والتوزيع) في الحلقات ، يأتي :

$$g(x\alpha + y\beta) = g(x)\alpha + g(y)\beta$$

وهو ما يثبت أن g شكل خطي على L أيضاً. نكتب:

$$g = \lambda f$$

وهذا طبيعي، وبذلك نعرف على المجموعة $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ عملية ثانية تمثل في «ضرب» عنصر من هذه المجموعة في عدد سلمي. يبقى علينا الآن أن نبين بأن المجموعة $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ المزودة بقانون الجمع المعرف في ف. 13، وبالعملية الثانية التي كنا بصدد تعريفها، مقياس على اليسار، على K بالفعل، نترك ذلك للقارئ (نستطيع أيضاً استعمال ما يلي: لتكن E مجموعة كل التطبيقات من L في K الخطية منها وغير الخطية، لننظر لِـ L كمجموعة ولِـ K كمقياس على اليسار على K؛ يسمح لنا المثال 4 من ف. 10 باعتبار E كمقياس على اليسار على K؛ ثم لنقول نفس الشيء عن $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ يكفي أن نثبت بأن $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ مقياس جزئي من E – وهو هدفنا من الاعتبارات السابقة).

تسمى المجموعة $\mathrm{Hom}\,(L, K)$ عند تزويدها بِـ «بنية» مقياس على اليسار على K والتي عرفناها آنفاً، تسمى **ثنوي المقياس على اليمين L على K**؛ نرمز له عادة بِـ: L^* وهو رمز مفضل عن $\mathrm{Hom}\,(L, K)$.

لو ننطلق من مقياس على اليسار L على K، نتوصل إلى تعريف ثنوي هذا المقياس، ويكون في هذه الحالة مقياساً على اليمين على K.

نذكر بهذا الخصوص أن التفريق بين «اليمين» و «اليسار» لا فائدة من ورائه فيما إذا كانت الحلقة K تبديلية، وهي الحالة السائدة من الناحية العملية.

ملاحظة 1. – ليكن f شكلاً خطياً على المقياس على اليمين L، على K؛ لنبين أن λf خطي مع الملاحظة أن λf مركب من f ومن التطبيق: $\xi \to \lambda\xi$ –؛ يكفي إذن البرهان على أن هذا التطبيق الأخير تماثل داخلي للمقياس على اليمين K، على K، أي أنه يحقق:

$$\lambda(\xi + \eta) = \lambda\xi + \lambda\eta$$

$$\lambda(\xi\mu) = (\lambda\xi)\mu$$

وهذا واضح.

ليكن L مقياساً على اليمين، على K؛ ما دمنا عرفنا على المجموعة L المؤلفة من الأشكال الخطية على L، بنية مقياس على اليسار، على K، نستطيع أن نطبق على L^* تعاريف ونظريات نظرية المقاييس. بصفة خاصة، لتكن الأشكال الخطية $f_1, ..., f_p$ على L، نقول عن شكل خطي f على L أنه عبارة (أو توفيقية) خطية لِـ $f_1, ..., f_p$ إذا وجدت أعداد سلمية $\lambda_1, ..., \lambda_p$ في K تحقق:

$$f = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$$

وهذه العلاقة تعني حسب تعريف عمليات الأشكال الخطية، أن

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x)$$

مهما كان x في L.

كما نسمى علاقة خطية بين $f_1, ..., f_p$ كل جملة:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p$$

مؤلفة من أعداد سلمية تحقق:

$$\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p = 0$$

في L^*، أي:

$$\lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_p f_p(x) = 0$$

مهما كان x في L، الخ، الخ...

2. ثنوي مقياس حر من صنف منته.

إذا تعلق الأمر بالناحية العملية الأولية فإن المبتدئ لا يحتاج لنتيجة «أعمق» من هذه:

نظرية 1. - ليكن L مقياساً على اليمين حراً ومن صنف منته، على K، وليكن $(a_1, ..., a_n)$ أساساً له.

نعتبر التطبيق: $\theta : L^* \to K^n$ المعطي بِـ:

$$\theta(f) = \big(f(a_1), ..., f(a_n)\big)$$

عندئذ يكون θ تشاكلاً لمقياسين على اليسار، على K، ويصبح لِـ L أساس $(u_1, ..., u_n)$ يحقق:

$$u_i(a_j) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

لتكن $\alpha_1, ..., \alpha_n$ عناصر كيفية من K؛ تبين النظرية 3 ف 12 أنه يوجد عنصر وحيد f من L^* يحقق $f(a_i) = \alpha_i$ من أجل $1 \leq i \leq n$، أي يحقق:

$$\theta(f) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

إذن فالتطبيق θ تقابل. لنبرهن أنه تشاكل بقي أن نتأكد من الخطية؛ من أجل ذلك نضع $f + g = h$ حيث f وَ g عنصران من L^* ونلاحظ:

$$\theta(f + g) = \big(h(a_1), ..., h(a_n)\big) = \big(f(a_1) + g(a_1), ..., f(a_n) + g(a_n)\big)$$
$$= \big(f(a_1), ..., f(a_n)\big) + \big(g(a_1), ..., g(a_n)\big) = \theta(f) + \theta(g)$$

من جهة أخرى يعني تعويض f بِـλf أننا نضرب المعاملات $f(a_i)$ يساراً بِـλ؛ ومنه نستنتج المساواة:

$$\theta(\lambda f) = \lambda \cdot \theta(f)$$

التي تبين أن θ خطي بالفعل.

لإنهاء برهان النظرية، بقي علينا إثبات وجود أساس $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ لِـ L^* يتمتع بالخاصيات المشار إليها؛ تعني العلاقات التي تربط العناصر u_i أن:

$$\theta(u_1) = (1, 0, 0, ..., 0)$$
$$\theta(u_2) = (0, 1, 0, ..., 0)$$
$$. . . . .$$
$$\theta(u_n) = (0, 0, 0, ..., 1)$$

أي أن θ تطبق الأساس $(u_i)_{1\le i\le n}$ لِـ L^* على الأساس القانوني لِـ K^n ؛ ولما كان θ تشاكل مقياسين، فإن وجود الأساس (u_i) المطلوب أمر واضح: يكفي أن نأخذ صور عناصر الأساس القانوني بواسطة التطبيق θ^{-1}؛ وهو ما ينهي البرهان.

نشير إلى أن العلاقات المفروضة على العناصر u_i تعطى مهما كان العنصر

$$x = a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n$$

من L، العلاقة:

$$u_i(x) = u_i(a_1)\xi_1 + \dots + u_i(a_n)\xi_n = \xi_i$$

أي أن العناصر u_i هي بالضبط التوابع الإحداثية للمقياس L، بالنسبة للأساس $(a_i)_{1\le i\le n}$ لِـ L (الفقرة 4 من ف. 11). من أجل كل f في L^* نعتبر الإحداثيات $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ لِـ f بالنسبة للأساس $(u_i)_{1\le i\le n}$ لِـ L^*؛ العلاقة:

$$f = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

تكتب إذن على النحو:

$$f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$$

مهما كان x في L، وبالتالي يأتي أن:

$$\alpha_i = f(a_i)$$

بعبارة أخرى، إن إحداثيات f بالنسبة للأساس (μ_i) لِـ L^* ليست سوى معاملات f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ L، المعرفة في المثال 3 من ف. 12.

تبين النظرية 1 أننا نستطيع إلحاق أساس (u_i) لِـ L بكل أساس (a_i) لِـ L؛ نقول عن (u_i) إنه الأساس الثنوي للأساس (a_i) لِـ L.

3. الثنوي المكرر لمقياس.

ليكن L مقياساً على اليمين على حلقة K ؛ كنا ألحقنا بـ L مقياساً على اليسار L^* على K ؛ والمقياس الأخير يقبل بدوره ثنوياً نرمز له بـ :

$$L^{**} = (L^*)^*$$

ويسمى الثنوي المكرر لـ L ؛ وهو مقياس على اليمين على K مثل L . بنفس الطريقة الثنوي المكرر ثلاث مرات $L^{***} = (L^{**})^*$ ، والثنوي المكرر أربع مرات $L^{****} = (L^{***})^*$ وهكذا على التوالي.

يمكننا إذن، وفي كل الحالات، تعريف تطبيق قانوني من L في L^{**} كما يلي. ليكن x عنصراً «ثابتاً» من L ، نعتبر التطبيق :

$$u : L^* \to K$$

المعطى بـ :

$$u(f) = f(x)$$

مهما كان f في L^* ؛

يمثل هذا التطبيق في الحاق كل شكل خطي f على L بقيمته عند النقطة x من L . إن التطبيق u خطي أي أنه

يحقق :

$$u(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot u(f) + \beta \cdot u(g)$$

مهما كان f وَ g في L^* والعددان السلميان α وَ β في K ؛ بوضع :

$$\alpha f + \beta g = h$$

نستطيع كتابة العلاقة السابقة على الشكل :

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

وما دام الأمر كذلك فالعلاقة تمثل بالضبط في تعريف العنصر $h = \alpha f + \beta g$ المنتمي لـ L^* .

يتبين مما سبق أن u شكل خطي على L^* ، أي أنه عنصر من L^{**} ،

وبهذه الطريقة تمكنا حقاً من إلحاق أي عنصر x في L بعنصر u من L^{**}؛ ومنه نعرف تطبيقاً من L في L^{**}، وهو تعريفاً، التطبيق القانوني من L في ثنويه المكرر L^{**}.

من جهة أخرى نبين أن هذا التطبيق خطي، من أجل ذلك نعتبر x، y في L وَ α، β في K ونضع:

$z = x\alpha + y\beta$؛ ثم نرمز بـ w, v, u المنتمية لـ L^{**} لصور z, y, x بواسطة التطبيق القانوني؛ حينئذ ترجع المسألة إلى إثبات العلاقة:

$$w = u\alpha + v\beta$$

ولما كانت u، v، w أشكالاً خطية على L^* فإن العلاقة الأخيرة تعني:

$$w(f) = u(f)\alpha + v(f)\beta$$

مهما كان f في L^*؛ لكن تعريف التطبيق القانوني من L في L^{**} يعطى:

$$u(f) = f(x) \quad , \quad v(f) = f(y) \quad , \quad w(f) = f(z)$$

وبالتالي يعود الأمر إلى إثبات: $f(z) = f(x)\alpha + f(y)\beta$ أو، بعد تعويض z بقيمته:

$$f(x\alpha + y\beta) = f(x)\alpha + f(y)\beta$$

مهما كان f في L^*؛ لكن هذه المساواة هي بالضبط تلك التي تعرف الأشكال الخطية على L.

نظرية 2 - ليكن L مقياساً حراً من صنف منته؛ إن التطبيق القانوني من L في ثنويه المكرر تشاكل.

للبرهان على هذه النظرية بقي أن نثبت بأن التطبيق القانوني:

$$j : L \to L^{**}$$

تقابل فيما إذا كان L حراً ومن صنف منته. ليكن $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ أساساً لـ L وَ $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ الأساس الثنوي في L^*، نضع:

$$u_i = j(a_i) \in L^{**}$$

من الواضح أنه يكفي أن نبين بأن العناصر u_i تشكل أساساً لِـ L^{**} :
لنبين أنها تشكل أساس L^{**} الثنوي للأساس (f_i) للمقياس L^* ، بعبارة أخرى نريد إثبات العلاقة :

$$u_i(f_j) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

لكن تعريف التماثل القانوني من L في L^{**} يعطى :

$$u_i(f) = f(a_i)$$

مهما كان f في L^* ، ومنه $u_i(f_j) = f_j(a_i)$ ، غير أن العناصر f_j تشكل الأساس الثنوي للأساس (a_i) لِـ L ولذلك نستنتج :

$$f_j(a_i) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

وهو ما يعطي العلاقات المطلوبة وينهي بذلك البرهان.

نتيجة 1 - ليكن L مقياساً على اليمين حراً ومن صنف منته ، وليكن u شكلاً خطياً على المقياس الثنوي L^* . أنه يوجد عنصر وحيد x من L يحقق :

$$u(f) = f(x) \qquad \forall f \in L^*$$

يوجد بالفعل عنصر وحيد x من L يحقق $u = j(x)$ حيث يرمز j للتشاكل القانوني من L على ثنويه المكرر.

نتيجة 2 - ليكن L مقياساً على اليمين حراً ومن صنف منته على K ، وليكن $(f_1, \ldots, f_n)$ أساساً للمقياس الثنوي L^* . عندئذ من أجل كل $\beta_1, \ldots, \beta_n$ في K ، يوجد عنصر وحيد x في L يحقق :

$$f_i(x) = \beta_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

لرؤية ذلك نلاحظ أن (f_i) تشكل أساساً لـL^* وبالتالي يوجد شكل خطي وحيد u على L^* يحقق $u(f_i) = \beta_i$ مهما كان i (النظرية 3، ف 12) وبما أن $u(f) = f(x)$ من أجل x في L معين بـu فإن البرهان قد تم.

4. منقول تماثل

ليكن L وَ M مقياسين على اليمين، على K وَ $f: L \to M$ تماثلاً. وليكن u شكلاً خطياً على M؛ إن التطبيق المركب $u \circ f$ شكل خطي على L (النظرية 1، ف 12). نستطيع إذن تعريف التطبيق:

$$^t f: M^* \to L^*$$

بوضع:

$$^t f(u) = u \circ f \qquad \forall u \in M^*$$

يسمى التطبيق $^t f$ **منقول التماثل** f.

إن هذا التطبيق تماثل مثل f. لتوضيح ذلك نعتبر u وَ v في M^*، ونكتب:

$$^t f(u + v) = (u + v) \circ f = u \circ f + v \circ f$$

بفضل النظرية 1، ف 14، وبالتالي:

$$^t f(u + v) = {}^t f(u) + {}^t f(v)$$

ومن جهة أخرى، نرمز من أجل كل λ في K، بـh_λ للتحاكي: $\xi \to \lambda\xi$ فنجد من أجل كل u في M^*:

$$^t f(\lambda u) = {}^t f(h_\lambda \circ u) = (h_\lambda \circ u) \circ f = h_\lambda \circ (u \circ f)$$

$$= h_\lambda \circ {}^t f(u) = \lambda \cdot {}^t f(u)$$

وهو ما يثبت خطية التطبيق المنقول $^t f$.

ملاحظة 2 - قد يبدو البرهان المقدم آنفاً غامضاً بالنسبة للقارئ المبتدئ ذلك أن الطابع الآلي هو المتغلب في هذا البرهان. ونحن ننصح، بطبيعة الحال، القارئ أن يتدرب على ترجمة هذا البرهان إلى لغة واضحة (وذلك بأن يرجع كل شيء إلى تعريف بنية مقياس ثنوي مقياس). وبعد هذا يجب أن نشير إلى أنه عندما نورد نص نظرية (النظرية 1، ف. 14 مثلاً) فذلك أن لنا أملاً في استعمالها حين تتيح لنا الفرصة ذلك! إن هذه الملاحظة تنطبق أيضاً على برهان النتيجة التالية:

نظرية 2 - تتمتع العملية المتمثلة في المرور من تماثل إلى منقولة بالخاصيات التالية:

أ) ليكن L وَ M مقياسين على اليمين؛ على K، و $f, g : L \to M$ تماثلين. لدينا في هذه الحالة:

$$^{t}(f+g) = {}^{t}f + {}^{t}g$$

ب) ليكن L، M، N ثلاثة مقاييس على اليمين على K، وَ $f : L \to M$ وَ $g : M \to N$ تماثلين. لدينا عندئذ:

$$^{t}(g \circ f) = {}^{t}f \circ {}^{t}g$$

جـ) ليكن L مقياساً على اليمين على K؛ إن منقول تشاكل ذاتي (التشاكل الذاتي المطابق، بالترتيب) لِـ L هو تشاكل ذاتي (التشاكل الذاتي المطابق، بالترتيب) لِـ L^*.

لإثبات النقطة أ) نضع: $h = f + g$؛ من أجل u في M^* لدينا:

$$^{t}h(u) = u \circ h = u \circ (f+g) = u \circ f + u \circ g = {}^{t}f(u) + {}^{t}g(u)$$

وهو ما يثبت أن $^{t}h = {}^{t}f + {}^{t}g$.

لإثبات النقطة ب) نضع: $h = g \circ f$؛ من أجل u في N^* لدينا:

$$^{t}h(u) = u \circ h = u \circ (g \circ f) = (u \circ g) \circ f = {}^{t}g(u) \circ f$$

$$= {}^{t}f([{}^{t}g(u)]$$

ومنه يأتي $^th = {}^tf \circ {}^tg$ المطلوب في ب) .

لإثبات النقطة ج) نبيّن أولاً أنه إذا كان $f: L \to L$ هو التطبيق المطابق، فالأمر كذلك فيما يخص منقوله، لرؤية ذلك نأخذ شكلاً خطياً u على L . لدينا :

$$^tf(u) = u \circ f = u$$

لأن f تطابق ومنه المطلوب . نفرض الآن أن f تشاكل ذاتي لِـ L ، هناك إذن تماثل g لِـ L بحيث :

$$f \circ g = g \circ f = j_L$$

وعليه :

$$^tg \circ {}^tf = {}^tf \circ {}^tg = {}^t(j_L) = j_{L^*}$$

وبالتالي فإن ^tf تشاكل ذاتي لِـ L^* بالفعل . من جهة أخرى تبين الحسابات السابقة أن لدينا العلاقة التالية :

$$^t(f^{-1}) = ({}^tf)^{-1}$$

من أجل كل تشاكل ذاتي f لِـ L .

ملاحظة 3 – علينا أن نحذر تعويض النقطة ب) من النظرية 3 بالدستور «البديهي» الخاطئ (بل أن ليس له معنى أصلا) وهو :

$$^t(f \circ g) = {}^tf \circ {}^tg$$

5. منقولة مصفوفة .

ليكن $f: L \to M$ تماثلاً لمقياسين على اليمين حرين ومن صنف منته، على K . نختار أساساً $(a_1, ..., a_p)$ لِـ L وأساساً $(b_1, ..., b_q)$ لِـ M ، ثم نرمز بِـ $(u_1, ..., u_p)$ لأساس L^* الثنوي للأساس $(a_1, ..., a_p)$ لِـ L ، وبِـ $(v_1, ..., v_q)$ لأساس M^* الثنوي للأساس $(b_1, ..., b_q)$ لِـ M . نرمز كذلك بِـ :

$$(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

لمصفوفة التماثل $f: L \to M$ بالنسبة للأساسين (a_i) وَ (b_j)؛ ونرمز بِـ :

$$(\beta_{ji})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

لمصفوفة التماثل المنقول : $^t f: M^* \to L^*$ بالنسبة للأساسين (v_j) وَ (u_i) . نريد حساب المصفوفة الأخيرة بدلالة مصفوفة f .

لدينا العلاقات التالية استناداً إلى تعريف مصفوفة $^t f$:

$$^t f(v_j) = \beta_{j1}\, u_1 + \dots + \beta_{jp}\, u_p \qquad (1 \leq j \leq q)$$

أي أن :

$$v_j \circ f = \beta_{j1}\, u_1 + \dots + \beta_{jp}\, u_p$$

وهذا يعني أنه مهما كان x في L فإن :

$$v_j[f(x)] = \beta_{j1}\, u_1(x) + \dots + \beta_{jp}\, u_p(x) \tag{2}$$

وبوضع :

$$x = a_1\, \xi_1 + \dots + a_p\, \xi_p$$

$$f(x) = b_1\, \eta_1 + \dots + b_q\, \eta_q$$

نجد، حسب الفقرة 2، العلاقات :

$$u_i(x) = \xi_i$$
$$v_j[f(x)] = \eta_j$$

وبالتالي ندرك أن العلاقة (2) تكافئ :

$$\eta_j = \beta_{j1}\, \xi_1 + \dots + \beta_{jp}\, \xi_p$$

وبما أن لدينا أيضاً العلاقات :

$$\eta_j = \alpha_{1j}\, \xi_1 + \dots + \alpha_{pj}\, \xi_p$$

من تعريف المصفوفة (α_{ij}) لِـ f، نرى بمقارنة النتيجتين السابقتين أن :

$$\beta_{ji} = \alpha_{ij} \quad ; \quad 1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q$$

تؤدي بنا هذه المصفوفة إلى إدخال التعريف التالي :

لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1q} \dots \alpha_{pq} \end{pmatrix}$$

التي تنتمي معاملاتها للحلقة K ، **منقولة المصفوفة** A هي تعريفاً المصفوفة :

$$^{t}A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1q} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{p1} \dots \alpha_{pq} \end{pmatrix}$$

التي نحصل عليها «بتبديل سطور وأعمدة A فيما بينها» كما يقال .

ملاحظة 4 - إن الإنتقال من A إلى ^{t}A يعني الإنتقال من f إلى ^{t}f فيما سبق . لكن إذا كان f تماثلا لمقياسين على اليمين على K فإن ^{t}f هو ، على العكس من ذلك ، تماثل لمقياسين على اليسار على K ، أي لمقياسين على اليمين على الحلقة K° المقابلة لِـ K (الفقرة 4 ، ف . 10) . لما كان حساب المصفوفات موافقاً لنظرية المقاييس على اليمين ، في حالة الحلقات غير التبديلية فينبغي أن ننظر للمنقولة ^{t}A لمصفوفة A ذات معاملات في حلقة K ، على أنها مصفوفة ذات معاملات في الحلقة المقابلة K° . تلك هي الطريقة التي سنتبعها في المستقبل دون أن نرجع إليها ثانية .

طبيعي أن تكون الإعتبارات السابقة زائدة ولا جدوى من ورائها في الحالة التي تكون فيها الحلقة K تبديلية .

نظرية 4 - لتكن K حلقة .

أ) نعتبر مصفوفتين A وَ B معاملاتهما في K ، لدينا حينئذ العلاقة :

$$^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$$

شرط أن يكون المجموع $A+B$ معرفاً .

ب) نعتبر مصفوفتين A وَ B معاملاتهما في K ، لدينا حينئذ العلاقة(*)

$$^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$$

شرط أن يكون الجداء AB معرفاً.

جـ) إذا كانت A مصفوفة مربعة معاملاتها في K ، فإن الشرط اللازم والكافي لتكون A قابلة للقلب هو أن تكون ^tA كذلك.

د) لدينا العلاقة التالية مهما كانت المصفوفة A التي تنتمي معاملاتها لِـ K :

$$^t({}^tA) = A$$

لإثبات أ) نضع :

$$A = (\alpha_{ij}), \qquad B = (\beta_{ij})$$

عندئذ نجد $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ji})$ ومنه :

$$^t(A + B) = (\alpha_{ji} + \beta_{ji}) = (\alpha_{ji}) + (\beta_{ji}) = {}^tA + {}^tB$$

لإثبات النقطة ب) نضع :

$$A = (\alpha_{jk})_{1 \leq j \leq q,\, 1 \leq k \leq r}, \qquad B = (\beta_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

إذن فإن المصفوفة :

$$AB = (\gamma_{ik})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq k \leq r}$$

معطاة بالعلاقات :

$$\gamma_{ik} = \sum_j \alpha_{jk}\, \beta_{ij} \tag{3}$$

(راجع الفقرة 2، ف.14) ، ننبه إلى أن الجداءات $\alpha_{jk}\,\beta_{ij}$ محسوبة، بطبيعة الحال، في الحلقة المعطاة K. ومن جهة أخرى لدينا :

$$^tA = (\alpha'_{kj})_{1 \leq k \leq r,\, 1 \leq j \leq q};$$
$$^tB = (\beta'_{ji})_{1 \leq j \leq q,\, 1 \leq i \leq p}$$

(*) يجب أن يُحسب الجداء $^tB \cdot {}^tA$ في الحلقة K° المقابلة لِـ K (أي في الحلقة K إذا كانت تبديلية) وهذا طبقاً للملاحظة 4.

مع : $\alpha'_{kj} = \alpha_{jk}$ وَ $\beta'_{ji} = \beta_{ij}$.

بوضع :

$${}^tB\,{}^tA = (\gamma'_{ji})_{1 \leq k \leq r,\, 1 \leq i \leq p}$$

لدينا :

$$\gamma'_{ki} = \sum_j \beta'_{ji}\,\alpha'_{kj}$$

حيث نحسب الجداءات $\beta'_{ji}\,\alpha'_{kj}$ في الحلقة المقابلة K ، ونراعي العلاقات : $\beta'_{ji} = \beta_{ij}$ وَ $\alpha'_{kj} = \alpha_{jk}$ ، ومنه يأتي :

$$\gamma'_{ki} = \sum_j \alpha'_{kj}\,\beta'_{ji} = \sum_j \alpha_{jk}\,\beta_{ij} = \gamma_{ik}$$

وذلك بفضل (3)؛ وهو ما يثبت العلاقة الواردة في النص ب) .

النتيجة د) بديهية .

بقي إثبات النقطة ج) . ليكن A عنصراً من $M_n(K)$ ؛ نفرض أن A تقبل القلب ونرمز بِـ B لمقلوبها؛ تنتج عن العلاقة $AB = BA = 1_n$ العلاقة : ${}^tB\,{}^tA = {}^tA\,{}^tB = {}^t(1_n)$ حيث من الواضح أن : ${}^t(1_n) = 1_n$

ومنه نستخلص أن ${}^tA$ تقبل القلب ، بالإضافة إلى ذلك تثبت الحسابات السابقة أن :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

أما بالنسبة للقضية العكسية فنفرض أن ${}^tA$ تقبل القلب عندئذ يبين ما توصلنا إليه آنفاً أن المصفوفة ${}^t({}^tA)$ تقبل القلب أيضاً ، أي أن A تقبل القلب .

وهكذا ينتهي برهان النظرية 4 .

ملاحظة 5 – بإمكاننا استنتاج النقطتين أ) وَ ب) في النظرية 4 ، من النقطتين المماثلتين في النظرية 3 ؛ نترك ذلك للقارئ كتمرين له .

ف . 17. مجاميع المقاييس الجزئية

1. مجموع مقياسين جزئيين .

لتكن K حلقة و L مقياساً على اليسار على K ، وليكن M و N مقياسين جزئيين من L . **مجموع** M وَ N هو تعريفاً، المقياس الجزئي من L المولد بالمجموعة $M \cup N$ ، بعبارة أخرى فهو أصغر مقياس جزئي من L يحتوي في آن واحد على M وَ N .

من السهل إعطاء إنشاء صريح لهذا المقياس الجزئي؛ إنه مجموعة العناصر z من L التي من أجلها يوجد عنصر x في M وَ y في N بحيث :

$$z = x + y$$

ذلك أنه من الواضح أن كل مقياس جزئي يحتوي على M وَ N يحتوي حتماً على كل شعاع z يكتب على النحو السابق، ومن جهة أخرى تشكل هذه الأشعة مقياساً جزئياً P يحتوي على M وَ N ، لرؤية هذا نلاحظ أن P يحتوي على M وَ N (ضع $x = 0$ أو $y = 0$ في العلاقة $z = x + y$) ؛ وأنه إذا كان :

$$z' = x' + y' \, (x' \in M, y' \in N)$$

$$z'' = x'' + y'' \qquad (x'' \in M, y'' \in N)$$

عنصرين من P فإن :

$$\lambda z' + \mu z'' = x + y$$

حيث λ وَ μ عددان سلميان وَ :

$$x = \lambda x' + \mu x'' \in M$$

$$y = \lambda y' + \mu y'' \in N$$

وهذا يثبت أن P مقياس جزئي.

إنطلاقاً مما سبق نرمز لمجموع مقياسين جزئيين M وَ N بالزمر(*):

$$M+N$$

مثال 1 – نأخذ $K = \mathbf{R}$ و L مجموعة الأشعة التي نقطة بدئها 0 في الفضاء المعتاد؛ نفرض أن M وَ N يمثلان مستقيمين يمران بـ 0؛ عندئذ يَمثل المجموع $M+N$ المستوى المولد بهذين المستقيمين فيما إذا كانا مختلفين وإلاَّ فلديا $M+N=M=N$.

يعمم التعريف والإنشاء السابقان ليضما حالة عدد كيفي من المقاييس الجزئية. لتكن $M_1, ..., M_p$ جماعة منتهية وكيفية مؤلفة من مقاييس جزئية من L؛ نرمز بـ P للمجموعة المكونة من العناصر z في L التي تتمتع بالخاصية التالية: توجد عناصر $M_1 \ni x_1$ ..., $M_p \ni x_p$ بحيث:

$$z = x_1 + ... + x_p \qquad (1)$$

عندئذ يكون P هو أصغر مقياس جزئي من L يحتوي على M_1، ...، M_p. من الواضح أولاً أن P يحتوي على M_i (ضع $x_j = 0$ من أجل $j \neq i$ في العلاقة السابقة) وأن كل مقياس جزئي من L يحتوي على المجموعات M_i يحتوي حتماً على الأشعة (1). يبقى إذن أن نوضح بأن P مقياس جزئي من L؛ إذا كان:

$$z' = x'_1 + ... + x'_p$$

$$z'' = x''_1 + ... + x''_p$$

عنصرين من P، فإن لدينا العلاقة التالية حيث λ' وَ λ'' عنصران من K.

$$\lambda' z'' + \lambda'' z'' = x_1 + x_1 + ... + x_p$$

مع:

$$x_i = \lambda' x'_i + \lambda'' x''_i \in M_i \qquad (1 \leq i \leq p)$$

(*) بصفة أعم، إذا كانت G زمرة ضربية (جمعية بالترتيب) وإذا كان A وَ B جزءين من G، فإننا نرمز بـ AB ($A + B$، بالترتيب) لمجموعة العناصر z في G التي من أجلها يوجد عنصر x في A وَ y في B بحيث $z = xy$ ($z = x + y$ بالترتيب).

وهو ما يبين النتيجة المطلوبة.

نقول هنا أيضاً أن المقياس الجزئي P هو مجموع المقاييس الجزئية $M_1 ..., M_p$ ونرمز له بِـ :

$$M_1 + ... + M_p$$

2. الجداء المباشر للمقاييس.

كانت المقاييس $M_1, ..., M_p$ فيما سبق مقاييس جزئية من مقياس مفروض L . ننطلق الآن من مقاييس على اليسار على K : $M_1, ..., M_p$ دون أن نفرض بأنها محتواة في نفس المقياس، ومنها ننشئ مقياساً يحتويها كلها وذلك بتقدير تشاكل.

من أجل ذلك نعتبر مجموعة الجداء:

$$L = M_1 \times ... \times M_p$$

المكونة من الجماعات: $x = (x_1, ..., x_p)$ حيث $M_1 \ni x_1$ ... ، $M_p \ni x_p$.

نعرف فيما يلي، على L بنية مقياس على اليسار، على K وذلك بوضع:

$$(x_1, ..., x_p) + (y_1, ..., y_p) = (x_1 + y_1, ..., x_p + y_p)$$
$$\lambda(x_1, ..., x_p) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_p)$$

من السهل التأكد من أننا نحصل بهذه الطريقة على بنية مقياس على L ، ولذا نترك للقارئ القيام بذلك.

إذا كان $M_1 = ... = M_p = K$ فإننا نحصل على المقياس K^p .

إذا كان $K = \mathbf{Z}$ فإننا نسترجع مفهوم الجداء المباشر للزمر التبديلية المعرفة في الفقرة 2 من ف. 7.

نقول، في الحالة العامة، إن $M_1 \times ... \times M_p$ المزود ببنية مقياس السابقة، هو **الجداء المباشر للمقاييس** $M_1, ..., M_p$.

من الواضح أن التطبيق :

$$pr_i : M_1 \times \ldots \times M_p \to M_i$$

المعطى بِـ $pr_i(x_1, \ldots, x_p) = x_i$ تماثل مقياسين . والأمر كذلك بالنسبة للتطبيق :

$$u_i : M_i \to M_1 \times \ldots \times M_p$$

المعطى بِـ :

$$u_i(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$$

مع العلم أن العنصر x المنتمي لِـ M_i في الطرف الأيمن يسبقه عدد من الأصفار يساوي $i - 1$.

من الواضح أن التماثل u_i متباين ولذا فهو تشاكل من M_i على مقياس جزئي من $M_1 x \ldots x M_p$. إننا لا نفرق ، من الناحية العملية ، وفي أغلب الأحيان بين M_i وصورته بواسطة u_i . يُبين الدستور :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_p)$$

إذن أن كل عنصر من $M_1 x \ldots x M_p$ يكتب على شكل مجموع لعنصر من M_1 وعنصر من M_2 ، … ، وعنصر من M_p ، أي أن $M_1 x \ldots x M_p$ مجموع للمقاييس الجزئية $M_1, \ldots, M_p$.

3. المجموع المباشر للمقاييس .

نعتبر ، مثل ما فعلنا في الفقرة 1 ، المقاييس الجزئية $M_1, \ldots, M_p$ من مقياس على اليسار L ، على K ، ثم نعتبر التطبيق :

$$f : M_1 \times \ldots \times M_p \to L$$

المعطى بِـ :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 + \ldots + x_p$$

وهو تماثل مقياسين . زيادة على ذلك لدينا العلاقة :

التي يعطيها تعريف مجموع جماعة مقاييس جزئية .

نقول عن المقاييس الجزئية $M_1, ..., M_p$ إنها **مستقلة خطياً** فيما إذا كان التماثل f تباينا ، أي إذا كان كل عنصر x من $M_1 + ... + M_p$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل : $x = x_1 + ... + x_p$ حيث $M_1 \ni x_1$ ، ... ، $M_p \ni x_p$.

وهذا يكافئ القول (النظرية 8 ، ف 7) بأن $\text{Ker}(f)$ يحتوي على 0 لا غير ، أي أن العلاقات :

$$x_1 + ... + x_p = 0 \quad ; \quad x_1 \in M_1, ..., x_p \in M_p$$

تقتضي :

$$x_1 = ... = x_p = 0$$

نظرية 1 - إن الشرط اللازم والكافي ليكون مقياسان جزئيان M وَ N من L مستقلين خطياً هو أن يكون $M \cap N = 0$.

لرؤية ذلك نأخذ x في $M \cap N$ ، لدينا بداهة : $x + (-x) = 0$ مع x في M وَ $-x$ في N إذن $x = 0$ في حالة ما إذا كان M وَ N مستقلين خطياً . للنظر في القضية العكسية نفرض $M \cap N = 0$ ، إذا كان x في M وy في N يحققان $x + y = 0$ فإن $x = -y \in M \cap N$ ، إذن $x = y = 0$ وهو ما يختم البرهان .

ملاحظة 1 - نعتبر التطبيق : $f: M \times N \to L$ المعطى بِـ :

$$f(x; y) = x + y$$

يبين البرهان السابق أن نواته مكوّنة من الثنائيات $(x, -x)$ حيث $x \in M \cap N$ ؛ من الواضح أن التطبيق $x \to (x, -x)$ تشاكل من $M \cap N$ على $\text{Ker}(f)$. إن هذه الملاحظة ذات أهمية بالغة فيما يخص حساب بعد مجموع فضاءات شعاعية جزئية (أنظر الفقرة 7 من ف . 19) .

عندما تكون المقاييس الجزئية $M_1, ..., M_p$ لمقياس L مستقلة خطياً ،

نقول إن $M_p + ... + M_1$ **مجموع مباشر** للمقاييس الجزئية المعطاة، ونرمز لهذا المجموع المباشر بِـ:

$$M_1 \oplus ... \oplus M_p$$

يشير الرمز $\oplus$ (الذي استعملناه بدل الرمز + المعتاد) إلى أننا أمام مجموع مقاييس جزئية مستقلة خطياً. من الواضح حينئذ أن التطبيق f المعرف أعلاه تشاكل من المقياس $M_1 x ... x M_p$ على المقياس $M \oplus ... \oplus M_p$؛ والوصف المخصص لهذا التشاكل هو «القانوني».

ملاحظة 2 -المقياس الجداء $M_1 x ... x M_p$ يساوي المجموع المباشر للمقاييس الجزئية التي لم نفرق بينها وبين M_1، ...، M_p في الفقرة السابقة.

ملاحظة 3 - لتكن a_1، ...، a_p عناصر من مقياس على اليسار L على K، نأخذ المقاييس M_1، ...، M_p مساوية للمقاييس الجزئية التي تولدها بالترتيب a_1، ...، a_p. عندئذ يكون $M_p + ... + M_1$ هو المقياس الجزئي من L المولد عن a_1، ...، a_p؛ ومن جهة أخرى تكون المقاييس الجزئية M_1، ...، M_p مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت الأشعة a_1، ...، a_p كذلك؛ وحينئذ تعني العلاقة:

$$L = M_1 \oplus ... \oplus M_p$$

أن a_1، ...، a_p تشكل أساساً لِـL. نترك للقارئ مهمة التأكد من ذلك بنفسه.

ليكن L مقياساً على اليسار على K، وليكن M مقياساً جزئياً من L؛ نقول عن M إنه **عامل مباشر** في L، إذا وجد مقياس جزئي N من L بحيث يكون L مجموعاً مباشراً لِـM وَ لِـN؛ نقول عندئذ أن N **مكمل** M **في** L. سنرى خلال ف 19 أنه إذا كان L فضاء شعاعياً بعده منته، على حقل، فإن كل فضاء شعاعي جزئي من L يقبل حتماً مكملاً. لكن هذه الخاصية لا تشمل الحلقات الكيفية.

مثال 2 - نأخذ $K = L = Z$ وَ $M = pZ$ مع $p \neq 0$؛ وليكن $N = qZ$ مقياساً جزئياً غير منعدم، من L؛ لدينا حينئذ: $M \cap N \neq 0$، لأن

$M \cap N \ni pq$ مثلا ، وبالتالي (النظرية 1) فإن M لا يقبل مكملاً في $\mathbf{Z}$ (إلاّ إذا كان $M = L$ أو $M = 0$) .

4. المجاميع المباشرة والمُسْقِطات .

ليكن L مقياساً على اليسار على K ، نعتبر **تحليلا** لِـ L إلى **مجموع مباشر** أي أننا نعتبر علاقة من الشكل :

$$L = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_p$$

حيث ترمز المجموعات M_i ، إلى مقاييس جزئية من L ، مستقلة خطياً . إن كل x من L يكتب إذن بطريقة وحيدة على الشكل :

$$x = x_1 + \dots + x_p$$

حيث ينتمي كل x_i إلى M_i ، وعليه نستطيع أن نضع :

$$x_i = v_i (x)$$

حيث يَرمز v_i لتطبيق من L في L . ومن جهة أخرى إذا أدخلنا التشاكل :

$$f : M_1 \times \dots \times M_p \to L$$

المعطى بِـ :

$$f(x_1, \dots, x_p) = x_1 + \dots + x_p$$

والتباينات القانونية :

$$j : M_i \to L$$

فإنه يتضح لدينا بأن :

$$v_i = j_i \circ pr_i \circ f^{-1}$$

وهو ما يثبت خطية v_i (كما يستطيع القارئ إثبات ذلك بالحساب المباشر) .

إن صورة التماثل الداخلي v_i هي المقياس الجزئي M_i ؛ ونلاحظ من أجل كل x في L بأن $v_i(x)$ هو الشعاع الوحيد من M_i الذي يحقق انتماء $x - v_i(x)$ إلى المقياس الجزئي المولد عن M_1 ، ... ، M_{i-1} ، M_{i+1} ، ... ، M_p ؛ لهذا السبب نقول عن $v_i(x)$ أنه **مَسْقَط** x **على** M_i .

من الواضح أن $v_i(x) = x$ لا تتحقق إلاّ إذا كان x في M_i . ولما كان $v_i(x)$ ينتمى إلى M_i مهما كان x في L فيأتي أن $v_i(v_i(x)) = v_i(x)$ مهما كان x في L ، وهذا يعنى أن :

$$v_i \circ v_i = v_i$$

نقول عن تماثل داخلي v لمقياس L إنه **مُسْقِط**. فيما إذا حقق الشرط السابق أي عندما يكون :

$$v \circ v = v$$

ومن ناحية ثانية نرى أيضاً بأن $v_j(x) = 0$ من أجل x في M_i وَ $i \neq j$ ؛ لدينا إذن $v_j(v_i(x)) = 0$ من أجل كل x في L وَ $i \neq j$ ، بعبارة أخرى لدينا :

$$v_j \circ v_i = 0$$

في حالة $i \neq j$.

أخيراً من أجل كل x في L لدينا :

$$x = x_1 + \ldots + x_p = v_1(x) + \ldots + v_p(x)$$

ومنه تأتي المساواة :

$$v_1 + \ldots + v_p = j_L$$

حيث يمثل j_L التطبيق المطابق لِـ L في نفسه .

تقبل هذه الخاصية خاصيات عكسية :

نظرية 2 - لتكن $v_1, \ldots, v_p$ تماثلات داخلية لِـ L وتحقق الشروط :

$$v_j \circ v_i = \begin{cases} v_i & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

$$v_1 + \ldots + v_p = j_L$$

عندئذ يكون L مساوياً للمجموع المباشر للمقاييس الجزئية $M_i = v_i(L)$.

نلاحظ أن العلاقة :

$$x = v_1(x) + \dots + v_p(x)$$

تبين أن L مجموع للمجموعات M_i . نعتبر بعد هذا عناصر x_i من M_i $(1 \leq i \leq p)$ بحيث :

$$x_1 + \dots + x_p = 0 \qquad (2)$$

إنه توجد عناصر y_i من L بحيث $x_i = v_i\ (y_i)$ ، لدينا إذن :

$$v_i(x_j) = v_i[v_j(y_j)] = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ v_i(y_i) = x_i & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

وبالتالي إذا طبقنا v_i على العلاقة (2) نستنتج العلاقة $x_i = 0$ وهو ما يبين أن المقاييس الجزئية M_i مستقلة خطياً وننهي بذلك برهان النظرية .

نتيجة – ليكن M مقياساً جزئياً من مقياس L . إن الخاصيات التالية متكافئة :

1) M عامل مباشر في L

2) يوجد تماثل داخلي v لِـ L بحيث :

$$v \circ v = v \quad ; \quad v(L) = M$$

3) يوجد تماثل q من L في M بحيث $q(x) = x$ مهما كان x في M .

واضح أن الخاصية 1) تستوجب 2) : نكتب $L = M \oplus N$ ونأخذ $v(x)$ مساوياً لمسقط x على M بالتوازي مع N .

ثم إن الخاصية 2) تستوجب 3) : بما أن v يطبق L على M ، فإننا نستطيع تعريف تماثل q من المقياس L في المقياس M بوضع $q(x) = v(x)$ مهما كان x في L (الفرق الوحيد بين v وَ q هو أن v تطبيق من L في L ، في حين أن

q تطبيق من L في M) ؛ من أجل x في M ، يوجد عنصر $y \in L$ بحيث $v(y) = x$ ، ومنه يأتي : $q(x) = v(x) = v\big(v(y)\big) = v(y) = x$.

لنبين أخيراً أن الخاصية 3) تستلزم 1) . لتكن N نواة q . لدينا :

$$M \cap N = 0$$

لأن إذا كان x في $M \cap N$ فإن $q(x) = x$ من جهة ، وَ $q(x) = 0$ من جهة ثانية ، ومنه يأتي $x = 0$. هذا ولدينا من أجل كل x في L : $q\big(q(x)\big) = q(x)$ ، إذن : $q\big(x - q(x)\big) = 0$ ، وبالتالي $x - q(x)$ ينتمي إلى N ؛ لنكتب $x = q(x) + \big(x - q(x)\big)$ ، نرى حينئذ أن : $L = M + N$. لما كان $M \cap N = 0$ فإن M عامل مباشر في L (حسب النظرية 1) ، وبذلك ينتهي البرهان .

الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية.

إن الهدف من الفصول 18، 19، 20 هو دراسة الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية المعرفة على حقل كيفي K، وغرضنا بصفة خاصة هو إدخال مفهوم أساسي وهو مفهوم البعد ثم إثبات أهم خاصيات جمل المعادلات الخطية على الحقل.

وعلى الرغم من أننا لا نهتم لا من الناحية العملية الأولية ولا في التحليل بغير الحقلين الحقيقي والعقدي فإننا لا نستفيد شيئاً في هذا الفصل بإضافة الفرض $K = \mathbb{R}$ أو $K = \mathbf{C}$.

يستعمل العرض التقليدي للجبر الخطي من جهة أخرى نظرية المعينات، لكنه مضت اليوم خمسون سنة أو يزيد على تمكننا من الإستغناء عن هذه الطريقة في العرض [illegible] إن العرض «الهندسي» المحض ليس أبسط من غيره فحسب بل هو أ[illegible] العروض المستندة على نظرية المعينات ذلك أن هذه الأخيرة تفترض [illegible] الحقل أو الحلقة K أن يكونا تبديليين. والواقع أن نظرية المعينات (التي [illegible] في فصول لاحقة) لها أهمية رئيسية تتمثل في كونها تمدنا بقواعد صر[illegible] الاستدلال الخطي وبدساتير صريحة لحل جمل المعادلات الخطية؛ لكنه [illegible] الفائدة فيما يخص إثبات نظريات الوجود المنصوص عليها في الفص[illegible].

من أهم نتائج [illegible]طي النظرية 13 من ف 19 التي تعطى؛ بعد اعتبار تماثل f من فضاء [illegible]عي L بعده منته في فضاء شعاعي آخر، علاقة بسيطة بين بعد L وبعد نواة f وبعد صورة f. هذا وإذا أمعنا النظر في البرهان التقليدي لهذه النظرية لاحظنا أنه بمقدورنا صياغتها بشكل يجعلها

تشمل المقاييس المعرفة على حلقة كيفية . وتسمح النتيجة المعممة عندئذ بالبرهان بكل بساطة على نتائج تعتبر نقطة الإنطلاق للنظرية «الكبيرة» للحلقات المسماة نوثيرية وللحلقات الرئيسية . يتناول الفصل 18 هذه النتائج ، ونشير بهذا الخصوص أن دراسة هذا الفصل وكذا التمارين المتعلقة به تعطى للقارئ ، رغم عدم جدواها مبدئياً لفهم ما يأتي بعدها ، فكرة حول نظرية تعتبر من أهم نظريات الجبر الحديث .

ف 18. نظريات الإنتهاء

1. التماثلات التي لها نوى وصور من صنف منته(*) .

تستند نتائج هذا الفصل على النظرية التالية :

نظرية 1 – لتكن K حلقة وَ L وَ M مقياسين على اليسار على K ، وليكن f تماثلاً من L في M .

إذا كان $\text{Ker}(f)$ وَ $\text{Im}(f)$ مقياسين من صنف منته على K ، فإن نفس الخاصية يتمتع بها L .

إذا كان $\text{Ker}(f)$ وَ K^p متشاكلين ، و $\text{Im}(f)$ وَ K^q متشاكلين ، فإن L وَ K^{p+q} متشاكلان .

نفرض أن $\text{Ker}(f)$ مولد عن الأشعة $a_1, ..., a_p$ وأن $\text{Im}(f)$ مولد عن الأشعة $b_1, ..., b_q$ ؛ نختار في L أشعة $a_{p+1}, ..., a_{p+q}$ بحيث :

$$b_1 = f(a_{p+1}), ..., b_q = f(a_{p+q})$$

لإثبات النظرية يكفي التأكد من أن $a_1, ..., a_{p+q}$ تولد في كل الحالات L ، ومن جهة أخرى أن هذه الأشعة البالغ عددها $p+q$ تشكل أساساً لِـ L في الحالة التي يكون فيها $a_1, ..., a_p$ أساساً لِـ $\text{Ker}(f)$ وَ $b_1, ..., b_q$ أساساً لِـ $\text{Im}(f)$.

(*) يستطيع القارئ المبتدئ الإكتفاء بقراءة الفقرة 1 من هذا الفصل ، ذلك أن الفقرات الأخرى ليست مستعملة في مكان آخر . إلاَّ أننا ننبه إلى أن قراءة الفقرات 2 ، 3 ، 4 ، 5 ستكون بالتأكيد تمريناً مفيداً حتى للمبتدئ .

لإثبات النقطة الأولى نعتبر شعاعاً x في L . بما أن $f(x)$ ينتمي إلى المقياس الجزئي من M المولد عن $b_1, ..., b_q$ فإنه توجد أعداد سلمية η_j $(1 \leq j \leq q)$ بحيث :

$$f(x) = \eta_1 b_1 + ... + \eta_q b_q$$

وهو ما يكتب أيضاً على الشكل :

$$f(x) = \eta_1 f(a_{p+1}) + ... + \eta_q f(a_{p+q}) = f(\eta_1 a_{p+1} + ... + \eta_q a_{p+q})$$

لدينا إذن :

$$x = \eta_1 a_{p+1} + ... + \eta_q a_{p+q} + y$$

حيث y ينتمي إلى $\mathrm{Ker}(f)$ ؛ غير أنه توجد في هذه الحالة أعداد سلمية ξ_i $(1 \leq i \leq P)$ بحيث :

$$y = \xi_1 a_1 + ... + \xi_p a_p$$

وبنقل هذه النتيجة في العلاقة السابقة ندرك أن x يكتب على شكل عبارة خطية للأشعة $a_1, ..., a_{p+q}$.

لإثبات النقطة الثانية يكفي أن نبين بأنه إذا كانت الأشعة a_i $(1 \leq i \leq p)$ مستقلة خطياً ، وكذا الأشعة b_j $1 \leq j \leq q$ ، فالخاصية نفسها تمتع بها الأشعة $a_1, ..., a_{p+q}$. لرؤية ذلك نعتبر علاقة من الشكل :

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{p+q} a_{p+q} = 0$$

ونطبق f على الطرف الأول من هذه العلاقة ؛ بما أن $a_1, ..., a_p$ تنتمي إلى $\mathrm{Ker}(f)$ يأتي :

$$\lambda_{p+1} f(a_{p+1}) + ... + \lambda_{p+q} f(a_{p+q}) = 0$$

لكن الأشعة $f(a_{p+1}) = b_1$ ، ... ، $f(a_{p+q}) = b_q$ مستقلة خطياً فرضاً ، ولذا نرى بأن :

$$\lambda_{p+1} = ... = \lambda_{p+q} = 0$$

وعليه تعود العلاقة الإبتدائية إلى : $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p = 0$ التي منها نستنتج :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

نظراً للاستقلال الخطي للأشعة $a_1, \dots, a_p$ ، وهو ما ينهي البرهان .

ملاحظة 1 - سنرى (النظرية 13 ، ف 19) أنه عندما يكون K حقلاً ، وهو الأمر الذي يسمح لنا بالكلام عن «بعد» فضاء شعاعي ذي بعد منته على K ، تبين النظرية 1 أن : بعد L يساوي مجموع بعدي $\text{Ker}(f)$ وَ $\text{Im}(f)$ ، أي :

$$\dim(L) = \dim[\text{Ker}(f)] + \dim[\text{Im}(f)]$$

من الطبيعي ، كما هو الحال دائماً ، ألاّ تكون هناك فائدة ترجى من الفرض بأن K حقل في برهان النظرية 1 ؛ ومن جهة أخرى تبين بقية هذا الفصل أنه إذا كنا نريد الإستفادة من كل ما تمخض عن هذه النظرية من نتائج فعلينا أساساً عرض النظرية هذه في أعم شكل لها .

2. المقاييس من الصنف المنتهي على حلقة نوثرية .

ليكن I مثالياً على اليسار من حلقة K (أي مقياساً جزئياً من K ينظر إليه كمقياس على اليسار على K) ؛ نذكر (راجع المثال 6 ، ف 11) أنه يقال عن I انه **من صنف منته** إذا كان من صنف منته بصفته مقياساً على اليسار على K ، أي إذا وجد عدد محدود من العناصر

$x_1, \dots, x_n$ المنتمية لِـ I بحيث تكون I هي مجموعة عناصر K التي تكتب على الشكل : $u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$.

نقول عن حلقة K انها **نوثرية على اليسار** فيما إذا كان كل مثالي على اليسار من K ، مثالياً من صنف منته .

نعرف بنفس الطريقة الحلقات النوثرية على اليمين باعتبار المثاليات على اليمين . ان كان K تبديلياً (وهي الحالة الأكثر أهمية في هذا المقام) نقول فقط أن K نوثري .

مثال 1 - يمثل كل حقل حلقة نوثرية (لأن مثاليْه الوحيدين هما $\{0\}$ وَ K ، ومعلوم أنهما من صنف منته) . وتمثل كل حلقة رئيسية حلقة نوثرية (المثال 10 ، ف . 8) .

إذا وضعنا الحلقات الرئيسية جانباً فإن أهم الأمثلة للحلقات النوثرية هي حلقات كثيرات الحدود من n متغير والتي تنتمي معاملاتها لحقل (راجع المثال 27 ، ف 32) ؛ ان هذه الحلقات - غير الرئيسية من أجل $m \geq 2$ ؛ - تلعب دوراً أساسياً في دراسة «الخطيات الجبرية» أي «المنحنيات» و «السطوح» ، الخ . . . المعرفة بمعادلات جبرية .

نظرية 2 - لتكن K حلقة . ان الخاصيتين التاليتين متكافئتان :

أ) الحلقة K نوثرية على اليسار .

ب) كل مقياس جزئي من أي مقياس على اليسار ومن صنف منته على K ، هو نفسه من صنف منته .

نرى مباشرة بأن ب) تستوجب أ) : ذلك أن المقياس على اليسار K ، على K من صنف منته وبالتالي فمقاييسه الجزئية (أي مقاييس K على اليسار) يجب أن تكون من صنف منته إذا تحققت ب) .

لنثبت الآن بأن أ) تستلزم ب) في مرحلتين : نثبت أولاً أنه مهما كان العدد الصحيح $n \geq 1$ ، فإن كل مقياس جزئي من K^n من صنف منته ؛ ومن ثم نستنتج الخاصية ب) .

نثبت إذن أن كل مقياس جزئيّ L من K^n من صنف منته . إذا كان $n = 1$ فإن هذا القول يعني النص أ) ؛ سنبرهن بالتدريج على n ويتم ذلك بافتراض الخاصية المطلوبة محققة من أجل $n - 1$. لهذا الغرض نعرف تطبيقاً $f : L \to K$ بوضع $f(\xi_1, ..., \xi_n) = \xi_n$ وهو تماثل من L في K . للبرهان على أن L من صنف منته يكفي (النظرية 1) التأكد من أن $\mathrm{Im}(f)$ وَ $\mathrm{Ker}(f)$ من صنف منته . نلاحظ أن $\mathrm{Im}(f)$ مقياس جزئي من K ولذا فهو من صنف منته حسب الفرض أ) . فيما يخص $\mathrm{Ker}(f)$ فهو مقياس جزئي من المقياس الجزئي من K^n المعرف بالعلاقة $\xi_n = 0$ ؛ إن هذا المقياس الجزئي متشاكل مع

وعليه تكون كل مقاييسه الجزئية وخاصة $\mathrm{Ker}(f)$ ، من صنف منته K^{n-1} حسب فرض التدريج .

وهكذا أثبتنا بفضل أ) أن كل مقياس جزئي من K^n من صنف منته . نأخذ الآن مقياساً على اليسار M على K ومقياساً جزئياً M' منه ؛ ولنثبت أنه إذا كان M من صنف منته ، فالأمر كذلك بالنسبة لِـ M' .

لما كان M من صنف منته ، فإنه يوجد (حسب النتيجة 1 من النظرية 3 ، ف . 12) عدد صحيح n وتماثل f من K^n في M . نعتبر $L = f^{-1}(M')$ ؛ بما أن f غامر فإنه ينجب تماثلاً من L على M' ؛ ومن جهة ثانية نلاحظ حسب ما سبق إثباته ، أن L من صنف منته ؛ وبالتالي فـ M' أيضاً من صنف منته (وبصفة أدق ، إذا كان L مولداً عن الأشعة a_i $1 \leq i \leq p$ ، فإنه من الواضح أن M' مولد عن الأشعة $f(a_i)$ ، $1 \leq i \leq p$) . وبذلك ينتهي البرهان .

3. المقاييس الجزئية من مقياس حر على حلقة رئيسية

تقودنا الطريقة المتبعة في برهان النظرية 2 إلى النتيجة التالية :

نظرية 3. – لتكن K حلقة . إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان :

أ) من أجل كل مثالي على اليسار I غير منعدم من K ، يوجد عنصر a في I بحيث يَكون التطبيق $x \to xa$ من K في I تقابلياً ؛

ب) إذا قبل مقياس على اليسار M على K أساساً من n شعاع ، وكان M' مقياساً جزئياً من M ، فإنه يوجد عدد صحيح $n \geq p$ بحيث يقبل M' أساساً من p شعاع .

لكي نبين أن ب) تقتضي أ) ، نأخذ $M = K$ ؛ عندئذ يقبل M أساساً يحتوي على شعاع واحد ؛ وبالتالي فإن كل مقياس جزئي من M (أي كل

مثالي على اليسار من K) يقبل حتماً أساساً مشكلاً من عدد من الأشعة يساوي صفراً أو واحداً، وهذا ما تعنيه الخاصية أ) بالضبط.

نبين الآن أن أ) تستوجب ب). من الواضح أن ب) تكافئ الخاصية التالية:

ب′) من أجل كل $n \geq 1$ وكل مقياس جزئي L من K^n يوجد عدد صحيح $p \leq n$ بحيث يكون L وَK^p متشاكلين.

من أجل $n = 1$، يتضح أن ب′) تعني النص أ)؛ نجري البرهان بالتدريج على n ونفرض أن ب′) محققة من أجل $n - 1$. ليكن إذن L مقياساً جزئياً من K^n، نعتبر، كما في الفقرة السابقة، التماثل $f: L \rightarrow K$ المعطى بِـ: $f(\xi_1, ..., \xi_n) = \xi_n$؛ إن صورة f مقياس جزئي من K ولذا فهو متشاكل مع K^r من أجل $r \leq 1$؛ كما أن نواة f متشاكلة مع مقياس جزئي من K^{n-1}، وبالتالي فهي متشاكلة مع K^s حيث $s \leq n - 1$، حسب فرض التدريج. وبالاستناد إلى النظرية 1 نستنتج أن L وَ K^{r+s} متشاكلان، وبما أن:

$$r + s \leq 1 + (n - 1) = n$$

فالبرهان انتهى.

ملاحظة 2 - يتحقق الفرض أ) عندما تكون K حلقة رئيسية أي حلقة تامة وتبديلية كل مثالياتها رئيسية. لرؤية ذلك نعتبر مثالياً I من K؛ لدينا:

$I = Ka$ حيث a في K؛ إذن فالتطبيق:

$$x \rightarrow xa$$

من K في I تطبيق غامر. بالإضافة إلى ذلك فإن نواته مكوّنة من العناصر x التي تحقق $xa = 0$. لكن إذا كان I غير منعدم وهي الحالة التي لدينا فيها ($a \neq 0$) فذلك يستوجب $x = 0$ لأن الحلقة K تامة. وعليه يأتي أن التطبيق المعتبر متباين وهو ما يبين أن الفرض أ) محقق.

من الواضح كذلك أن الفرض أ) محقق فيما إذا كان K حقلاً (تبديلياً أو

غير تبديلي)، لأن المثالي على اليسار غير المنعدم في K هو K نفسه ولا وجود لغيره، وعليه يكفي أخذ $a = 1$ في نَص الفرض أ).

تمثل الحالتان السابقتان من الناحية العملية الحالتين الوحيدتيم اللتين تستعملان النظرية 3.

نشير إلى أن النظرية 3 تستلزم النتيجة التالية، عند إعتبار الحلقة $\mathbf{Z}$ (وهي حلقة رئيسية):

نتيجة النظرية 3 – كل زمرة جزئية من $\mathbf{Z}^n$ متشاكلة حتماً مع $\mathbf{Z}^p$ وذلك من أجل عدد صحيح $n \geq p$.

لدينا، بطبيعة الحال، نتيجة مماثلة عند تعويض $\mathbf{Z}$ بحقل، لكن النتائج التي نتوصل إليها في هذه الحالة أدق من السابقة، سنتعرض لها في الفصل الموالي.

4. تطبيقات حول جمل المعادلات الخطية.

ليكن K حلقة وَ f تماثلاً من المقياس على اليمين K^n على K في المقياس على اليمين K^p على K. ولتكن $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ مصفوفة f (بالنسبة للأساسين القانونيين لِـ K^n وَ K^p)؛ إذا كان $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ شعاعاً من K^n فإن صورته:

$$y = f(x) = (\eta_1, ..., \eta_p)$$

تعطى إذن بالعلاقات:

$$\alpha_{11} \xi_1 + ... + \alpha_{n1} \xi_n = \eta_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{1p} \xi_1 + ... + \alpha_{np} \xi_n = \eta_p$$

وبالتالي نجد أن نواة f هي المقياس الجزئي من K^n المؤلف من الأشعة التي تحقق العلاقات:

$$(1)\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{n1}\xi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1p}\ \xi_1 + \dots + \alpha_{np}\xi_n = 0 \end{cases}$$

نقول عندئذ إن (1) جملة من p معادلة خطية متجانسة ومن n مجهول ذات معاملات في K ،

ليكن L المقياس الجزئي من K^n المؤلف من حلول (1). سنترجم الآن بلغة المعادلات الخطية الخاصيتين التاليتين اللتين يتمتع بهما L : أ) L من صنف منته. ب) يوجد عدد صحيح $n \geq r$ بحيث يكون L وَ K^r متشاكلين. تتحقق الخاصية الأولى حينما يكون K نوثرياً على اليمين (النظرية 2) ، أما الثانية فتتحقق حينما يكون K حقلاً أو حلقة رئيسية (النظرية 3).

نفرض أن L من صنف منته؛ يوجد عندئذ عدد منته من الأشعة(*) :

$$(2)\begin{cases} x^1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_n^1) \\ x^2 = (\xi_1^2, \dots, \xi_n^2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^r = (\xi_1^r, \dots, \xi_n^r) \end{cases}$$

في L بحيث تكون عناصر L هي الأشعة :

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

التي تكتب على الشكل :

$$x = x^1\tau_1 + \dots + x^r\tau_r \qquad (3)$$

حيث يرمز $\tau_1, \dots, \tau_r$ لأعداد سلمية. بمراعاة (2) نجد أن العلاقة (3) تكافئ، بداهة جملة العلاقات التالية :

$$(4)\begin{cases} \xi_1 = \xi_1^1\tau_1 + \dots + \xi_1^r\tau_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n = \xi_n^1\tau_1 + \dots + \xi_n^r\tau_r \end{cases}$$

(*) الأدلة الموجودة في أعلى الحروف ضمن الدساتير السابقة لا لعب بطبيعة الحالة دور «الاس» .

وهكذا عندما تكون الحلقة K نوثرية على اليمين فإنه توجد ثوابت ξ_i^j في K بحيث تكون حلول الجملة (1) هي جماعات الأعداد السلمية : $\xi_1, ..., \xi_n$ التي تكتب على الشكل (4) حيث العناصر τ_j أعداد سلمية كيفية من K . نعبر عن هذه النتيجة بالقول إن حلول الجملة (1) تتعلق بعدد منته من الوسيطات الكيفية (وهي المتغيرات $\tau_1, ..., \tau_r$ الظاهرة في الدساتير (4)) .

إذا كان K حقلاً أو حلقة رئيسية فإننا نستطيع افتراض أن الأشعة (2) تشكل أساساً لِـ L ، وعندئذ يكتب كل عنصر x من L بطريقة وحيدة على الشكل (3) . بعبارة أخرى ، إذا كان K حقلاً أو حلقة رئيسية فإنه توجد ثوابت :

$$\xi_i^j \in K \qquad (1 \leq i \leq n \ \text{،} \ 1 \leq j \leq r \leq n)$$

بحيث يكون التطبيق :

$$(\tau_1, ..., \tau_r) \rightarrow (\xi_1, ..., \xi_n)$$

المعطى بالدساتير (4) تقابلياً من K^n على مجموعة حلول (1) .

سنعطي فيما بعد ، وفي الحالة التي يكون فيها K حقلاً ، نتائج أكثر كمالاً وصراحة .

5. تمييزات أخرى للحلقات النوثرية .

نعطي في هذه الفقرة بعض الخصائص المميزة للحلقات النوثرية . ندخل في البداية المصطلحات التالية :

لتكن (A_n) متتالية من أجزاء مجموعة X ؛ نقول إنها **متتالية متزايدة** إذا تحقق الشرط التالي مهما كان n :

$$A_n \subset A_{n+1}$$

ونقول إنها **متتالية مستقرة** إذا وجد عدد صحيح p بحيث تتحقق المساواة التالية من أجل $p \leq n$:

$$A_n = A_{n+1}$$

وهذا يؤدي إلى سلسلة المساواة : $A_p = A_{p+1} = A_{p+2} = \dots$.

لنعتبر من جهة ثانية مجموعة F من أجزاء X ؛ نقول عنصرا A من F **عنصر أكبري** لـF إذا أدت العلاقتان $A \subset B$ وَ $B \in F$ إلى العلاقة $A = B$ ؛ أي إذا لم يحتو F على أية مجموعة أكبر تماماً من A (هذا لا يعني أبداً أن كل عناصر F محتواة في A . . .) .

نظرية 4 - لتكن K حلقة . إن الخاصيات التالية متكافئة :

1) الحلقة K نوثرية على اليسار (أي أن كل مثالي على اليسار من K ، من صنف منته) ؛

2) كل متتالية متزايدة من المثاليات على اليسار في K ، متتالية مستقرة .

3) لكل مجموعة غير خالية من المثاليات على اليسار ، في K ، عنصر أكبري على الأقل .

لنثبت أن 1) تستوجب 2) . لتكن (I_n) متتالية متزايدة من المثاليات على اليسار في K ؛ إن الإتحاد I للعناصر I_n مثالي على اليسار أيضاً (النظرية 1 . ف . 10) . لما كانت K نوثرية على اليسار ، فإن I مولد عن عناصر $x_1, \dots, x_r$ عددها محدود ؛ وبالإستناد إلى تعريف الإتحاد توجد حتماً أعداد صحيحة $p_1, \dots, p_r$ بحيث يكون $x_1 \in I_{p_1}$ ، ... ، $x_r \in I_{p_r}$. نضع $p = \text{Max}(p_1, \dots, p_r)$ حينئذ يضم I_p كل العناصر $x_1, \dots, x_r$ ذلك أنه يحتوي I_{p_1} ، ... ، I_{p_r} ؛ وبالتالي يحتوي I_p المثالي المولد عن $x_1, \dots, x_r$ وهو I ؛ إذن من أجل $p \leq n$ نجد $I_p \subset I_n \subset I \subset I_p$ ومنه $I_p = I_n$ وهذا ما يثبت الاستلزام .

نثبت الآن أن 2) ستوجب 3) . لتكن F مجموعة غير خالية من المثاليات على اليسار في K . لو كانت F لا تقبل أي عنصر أكبري لاستطعنا ، من أجل كل I في F ، إيجاد J في F يحتوي تماماً على I . لنختر عنصراً I_1 في F يوجد حينئذ I_2 في F يحتوي تماماً على I_1 ثم I_3 في F يحتوي تماماً على I_2

وهكذا على التوالي؛ حتى نحصل على متتالية متزايدة تماماً من المثاليات على اليسار في K ، لكن هذه النتيجة تخالف ما ورد في 2) .

بقي أن نبين بأن 3) تقتضي 1) . ليكن I مثالياً على اليسار في K ؛ ولتكن F مجموعة المثاليات على اليسار في K ذات الصنف المنتهي والمحتواة في I . إن F غير خالية (فهي تحتوي مثلاً على المثالي 0 من K) . استناداً إلى 3) فإن المجموعة F تقبل إذن عنصراً أكبرياً J . لتكن $(x_1, ..., x_n)$ جملة من مولدات J . من أجل كل x في I ، فإن المثالي على اليسار المولد عن $x_1, ..., x_n$ وَ x من صنف منته ومحتوى في I - وعليه فهو ينتمي إلى F - ويحتوي J ؛ لما كان J عنصراً أكبرياً في F ، فهذا المثالي لا يمكن أن يكون سوى J نفسه؛ لدينا إذن x في J مهما كان x في I وعليه $I = J$ ، وهو ما يثبت أن I من صنف منته وننهي بذلك برهان النظرية .

ملاحظة 3 - نقول عن مثالي على اليسار (على اليمين ، ثنائي الجانب ، بالترتيب) I من حلقة K إنه **أكبري** فيما إذا كان $I \neq K$ وكانت المثاليات على اليسار (على اليمين ، الثنائيات الجانب ، بالترتيب) في K الوحيدة ، التي تحتوي على I هما I و K لا غير . يمكن أن نبرهن باتباع طرق معقدة في نظرية المجموعات ، أنه إذا كانت K حلقة ، فإن كل مثالي على اليسار (على اليمين ، ثنائي الجانب ، بالترتيب) I في K وتخالف K محتوى على الأقل في مثالي على اليسار (على اليمين ، ثنائي الجانب بالترتيب) أكبري في K (نظرية كرول (Krull)) .

إن هذه النتيجة التي تلعب اليوم دوراً أساسياً في الجبر ، يبرهن عليها ببساطة في حالة ما إذا كانت الحلقة K نوثرية : يكفي للوصول لذلك تطبيق الخاصية 3 من النظرية 4 على مجموعة المثاليات على اليسار (على اليمين ، ثنائي الجانب ، بالترتيب) J من K التي تحقق $I \subset J$ وَ $J \neq K$.

ف . 19. مفهوم البعد

1. وجود الأسس .

كنا قد أوردنا النتيجة التالية ضمن الفقرة 4 من ف . 11 :

نظرية 1 – كل فضاء شعاع ذو بعد منته(*) على حقل يقبل حتماً أساساً .

إن هذه النظرية ناتجة عن النظرية التالية الأكثر دقة :

نظرية 2 – ليكن M فضاء شعاعياً بعده منته ، على حقل ، ولتكن X مجموعة منتهية من مولدات M وَ A جزء من X . نفرض عناصر A مستقلة خطياً . يوجد عندئذ أساس B لِـ M يحقق :

$$A \subset B \subset X$$

لنعتبر كل الأجزاء الحرة من X والتي تحتوي A ؛ يوجد على الأقل جزء من هذا النوع وهو A نفسه . من بين هذه الأجزاء نعتبر تلك التي تحتوي على أكبر عدد ممكن من العناصر ، نرمز بِـ B لجزء منها . لإثبات النظرية 2 يكفي أن نبين بأن B أساس لِـ M أو أن B يولد M لأن B حر حسب إنشائه .

لما كانت X تولد M فيكفي إثبات أن كل x من X يكتب على شكل عبارة خطية لعناصر B . وهو أمر واضح حينما يكون x في B ، لنفرض أن x ليس في B .

(*) تصلح نتائج هذه الفقرة حتى ولو كانت أبعاد الفضاءات الشعاعية غير منتهية ، لكن البرهين العامة معقدة للغاية ويتعذر لذلك تقديمها في هذا المكان .

إن المجموعة $B' = B \cup \{x\}$ محتواة في X وتحتوي على عدد من العناصر يفوق تماماً عدد عناصر B ؛ وبما أن لدينا $A \subset B'$ فإنه لا يمكن لـ B' أن تكون حرة. إذا رمزنا إذن بـ $x_1, ..., x_r$ لعناصر B المختلفة فإننا نتأكد من وجود علاقة من الشكل:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r + \lambda x = 0 \qquad (1)$$

حيث $\lambda_1, ..., \lambda_r, \lambda$ أعداد سلمية غير منعدمة كلها. زيادة على ذلك لدينا $\lambda \neq 0$ ولولاه لأصبحت (1) علاقة خطية غير بديهية (أو تافهة) بين العناصر x_i في B وهذا مع حرية B.

بما أن λ غير منعدم وحلقة الأساس K حقل فإن λ يقبل القلب في K، وبضرب الطرف الأول من (1) في مقلوب λ نجد:

$$x = -\lambda^{-1}\lambda_1 \ x_1 - ... - \lambda^{-1}\lambda_r \ x_r$$

وهكذا بينا إذن أن كل x في X يكتب على شكل عبارة خطية لعناصر B، ومنه النظرية 2.

تترتب عن النظريتين 1 وَ 2 (كان بالإمكان تقديم برهانهما في ف 11) نتائج هامة: سنجد بالإضافة إلى النتيجتين التاليتين بعض النتائج الأخرى في الفقرتين 2 وَ 3.

نتيجة 1 - ليكن M فضاء شعاعياً بعده منته، على حقل K. إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون عناصر معينة في M ضمن أساس لـ M هو أن تكون تلك العناصر مستقلة خطياً.

إذا وجد أساس لـ M تحتوي على أشعة معينة: $x_1, ..., x_p$، فمن الواضح أن هذه العناصر مستقلة خطياً. نرى الآن القضية العكسية ونفرض أن هذه العناصر مستقلة خطياً، لإيجاد أساس لـ M يحتوي على الأشعة المعطاة نختار جملة منتهية G من مولدات M ونطبق النظرية 2 على المجموعتين:

$$X = G \cup \{x_1, ..., x_p\}$$
$$A = \{x_1, ..., x_p\}$$

نتيجة 2 - ليكن M فضاء شعاعياً، بعده منته، على حقل. إن كل فضاء شعاعي جزئي من M عامل مباشر في M.

ليكن M' فضاء شعاعياً جزئياً من M. بالإستناد إلى النظرية 2، ف 18 نجد أن M' ذو بعد منته، إذن (النظرية 1) يقبل أساساً $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$؛ بتطبيق النتيجة 1 على هذه الأشعة وعلى M نرى أنه توجد أشعة $x_{p+1}, ..., x_r$ بحيث تشكل العناصر $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ أساساً لِـ M. من الواضح حينئذ أن الفضاء الجزئي من M المولد عن $x_{p+1}, ..., x_r$ مكمل لِـ M' في M.

ملاحظة 1 - يستعمل برهان النتيجة 2 أعلاه الخاصية القائلة بأن كل فضاء جزئي من فضاء شعاعي M، بعده منته، على حقل K، له أيضاً بعد منته على K، وهذا ناتج بالفعل عن أن كل حقل حلقة نوثرية بالضرورة (نستعمل حينئذ النظرية 2، ف 18) أو حلقة رئيسية (نستعمل حينئذ النظرية 3، ف 18). لكنه من الواضح أننا نستطيع إثبات ذلك بطريقة مباشرة وأولية (والتي لا تختلف إلا قليلاً عن برهاني النظريتين 2 وَ 3، ف 18) والطريقة هذه هي التالية:

نعلم (النظرية 1) أن M يقبل أساساً ولذا نستطيع إفتراض $M = K^n$. إذا كان $n = 1$ فالفضاءات الشعاعية الجزئية (من M) الوحيدة هي 0 وَ M لأن K حقل وعليه فهما من بعد منته. في الحالة العامة نعتبر فضاء شعاعياً جزئياً M' من K^n ونطابق K^{n-1} بالفضاء الشعاعي الجزئي من K^n الذي يتكون من الأشعة $(\xi_1, ..., \xi_n)$ المحققة للمساواة $\xi_n = 0$. إذا كان $M' \subset K^{n-1}$ فبإمكاننا أن نفرض أن M' ذو بعد منته (نبرهن بالتدريج على n). أما إذا كان M' غير محتوي في K^{n-1} فإننا نختار في M' شعاعاً: $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ بحيث $\alpha_n \neq 0$ ثم نضع: $M'' = M' \cap K^{n-1}$؛ من أجل كل عنصر:

$$x = (\xi_1, ..., \xi_n)$$

من M'، نستطيع أن نكتب:

$$x = \xi_n \alpha_n^{-1} a + y$$

ذلك لأن α_n يقبل القلب في K، مع العلم أن y شعاع مركبته الأخيرة

منعدمة ولذا فهو ينتمي إلى K^{n-1} وإلى M' ، وبالتالي إلى M'' ؛ وهكذا نرى في الحين أن M' مجموع مباشر للفضاء الجزئي Ka المولد عن a ولـ M'' ؛ لكن M'' محتوى في K^{n-1} وبعده منته حسب فرض التدريج ؛ وعليه فالأمر كذلك فيما يخص M' ، وهو ما يختم البرهان.

سنجد ضمن مراجع هذا الكتاب العديد من البراهين الأخرى. فمثلاً نستطيع إثبات النظرية 2 والنظرية 6 وبعدها النظريات 10 ، 11 ، 12 ؛ حينئذ نستنتج الملاحظة 1 أو بالأخرى النتيجة المثبتة فيها مباشرة من النظرية 12 .

2. تعريف فضاء شعاعي جزئي بواسطة معادلات خطية.

ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على الحقل K وَ M فضاء شعاعياً جزئياً من L . نعتبر في الثنوي L^* لِـ L المجموعة التي نرمز لها بِـ :

$$M^\circ$$

والمؤلفة من الأشكال الخطية f على L التي تحقق :

$$f(x) = 0 \qquad , \forall x \in M$$

إن المجموعة هذه فضاء شعاعي جزئي من L^* لأنها إذا إحتوت على شكلين f وَ g ووضعنا $h = \alpha f + \beta g$ حيث α وَ β عددان سلميان كيفيان ، فإننا نستخرج العلاقة التالية من أجل كل x في M :

$$h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = 0$$

إذن h ينتمي إلى M° وهو المطلوب.

نقول عندئذ عن M° إنه **العمودي** على M في L^* . تبين النتيجة الموالية أن معرفة الفضاء الجزئي M° يسمح بإيجاد الفضاء الجزئي M من جديد :

نظرية 3 - ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته ، و M فضاء جزئياً من L ، و M° العمودي على M في L^* . إن الشرط اللازم والكافي لانتماء عنصر x من L إلى M هو أن يكون :

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

مهما كان الشكل الخطي f في $M°$.

من البديهي أن يكون الشرط ضرورياً، نبين الآن أنه كاف . كما أوضحنا ذلك في برهان النتيجة 2 للنظرية 2 فإنه يوجد أساس $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ لِـ L وعدد صحيح $r \geq p$ بحيث يكون M مولداً عن $a_1, ..., a_p$. لتكن $f_1, ..., f_r$ التوابع الإحداثية بالنسبة للأساس $a_1, ..., a_r$ لِـ L ؛ من الواضح أن M معرف بالعلاقات :

$$f_{p+1}(x) = ... = f_r(x) = 0 \tag{3}$$

أي أن $M°$ يحتوي على الأشكال $f_{p+1}, ..., f_r$ وأن العلاقات (3) تميز عناصر M . ولما كانت العلاقات (3) محققة بداهة إذا تحقق الشرط (2) من أجل كل f في $M°$ فإن برهان النظرية قد انتهى .

ملاحظة 2 – الواقع أن الأشكال $f_{p+1}, ..., f_r$ التي أنشأناها أعلاه، تشكل أساساً لِـ $M°$. ذلك أنها أشكال مستقلة خطياً (تكون الأشكال $f_1, ..., f_r$ أساس L^* الثنوي للأساس $a_1, ..., a_r$ لِـ L)، ولذا يكفي أن نبين أنها تولد $M°$. من أجل ذلك نعتبر شكلاً f في L^* ونضع : $f(a_i) = \alpha_i$ ، لدينا :

$$f(x) = f(a_1 \xi_1 + ... + a_r \xi_r) = \alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_r \xi_r$$

من أجل $x = a_1 \xi_1 + ... + a_r \xi_r$ ؛ وبما أن $\xi_i = f_i(x)$

يأتي :

$$f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_r f_r$$

مع $\alpha_i = f(a_i)$ ؛

إذا كان f ينتمي إلى $M°$ فلدينا بصفة خاصة : $f(a_1) = ... = f(a_p) = 0$ ، وبالتالي :

$$f = \alpha_{p+1} f_{p+1} + ... + \alpha_r f_r$$

وهو ما يبين بالفعل أن $f_{p+1}, ..., f_r$ تولد $M°$.

بخصوص القضية العكسية نلاحظ أنه إذا كانت الأشكال $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ تولد $M°$ فإن عناصر M مميزة بالعلاقات:

$$f_1(x) = ... = f_m(x) = 0$$

لرؤية ذلك نشير إلى أننا نستطيع كتابة كل عنصر f من $M°$ على الشكل $f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_m f_m$ حيث تنتمي المعاملات α_j إلى K، ثم إنه من الواضح أن المعادلات المعتبرة تستوجب حينئذ $f(x) = 0$، إذن $x \in M$ حسب النظرية 3.

إن الأهمية الأولى للنظرية 3 تتمثل في الخاصية التي أثبتناها آنفاً، وهي جديرة بأن توضع في نص صريح:

نتيجة 1 - لتكن $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ جملة مولدات لِـ$M°$. عندئذ تكون عناصر M مميزة بالعلاقات:

$$f_1(x) = ... = f_m(x) = 0$$

وها هي نتيجة هامة أخرى نستخرجها من النظرية 3:

نتيجة 2 - ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على حقل و M فضاء شعاعياً جزئياً من L. حتى يكون $M \neq L$ يجب ويكفي أن يوجد على L شكل خطي f غير منعَدم ويحقق:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in M$$

إذا كان $M = L$ فمن الواضح أن $M° = \{0\}$. والعكس بالعكس إن كان $M° = \{0\}$ فالنظرية 3 تبين أن $M = L$. ولذا فإن العلاقتين $M = L$ وَ $M° = \{0\}$ متكافئتان؛ وبالتالي فإن هناك تكافؤ بين العلاقة $M \neq L$ وَ $M° \neq \{0\}$، وبذلك ينتهي برهان النتيجة.

3. شروط تلاؤم جملة معادلات خطية.

سنقوم بدراسة مفصلة لنظرية الجمل الخطية ضمن ف 20؛ لكننا نستطيع من الآن الإجابة عن السؤال المتعلق بإيجاد الشروط التي تجعل جملة معادلات خطية تقبل حلولاً. ذلك هو موضوع النظريتين الواردتين في هذه الفقرة.

نظرية 4 - لتكن $f_1, ..., f_r$ أشكالاً خطية على فضاء شعاعي M على حقل K. إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان:

أ) الأشكال $f_1, ..., f_r$ مستقلة خطياً.

ب) مهما تكن الأعداد السلمية $\beta_1, ..., \beta_r$ من K فإنه يوجد على الأقل عنصر x في M، يحقق العلاقات:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_r(x) = \beta_r \end{array}\right. \qquad (4)$$

لتوضيح ذلك نعتبر التماثل $f: M \to K^r$ المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \big(f_1(x), ..., f_r(x)\big)$$

تعني الخاصية ب) أن f غامر. إلاّ أن $f(M)$ فضاء جزئي من K^r؛ بفضل النتيجة 2 للنظرية 3 نرى أن البرهان يعود إلى التعبير على الخاصية التالية: إذا كان شكل خطي u على K^r منعدماً على الفضاء الجزئي $f(M)$ فإن $u = 0$.

ليكن:
$$u(\xi_1, ..., \xi_r) = \lambda_1 \xi_1 + ... + \lambda_r \xi_r$$

شكلاً من هذا النوع؛ لدينا:

$$u\big(f(x)\big) = \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_r f_r(x)$$

مهما كان x في M؛ إن القول بأن u منعدم يعني إذن أن الأشكال f_i تحقق العلاقة الخطية:

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

وهكذا يتبين أن الخاصية أ) تعني بالفعل أن الشكل الوحيد u الذي ينعدم على الفضاء الجزئي $f(M)$ هو $u = 0$ ، وبذلك نختم برهان النظرية 4 .

نعتبر الآن جملة المعادلات :

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) = \beta_n \end{cases}$$

حيث لا نفرض أن الأشكال الخطية $f_1, \dots, f_n$ على الفضاء الشعاعي M ، أشكال مستقلة خطياً . إذا أعتبرنا الثنوي M^* لِـ M فإن هذه الأشكال تولد فيه فضاء شعاعياً جزئياً F بعده منته ؛ واستناداً إلى النظرية 2 نستطيع استخراج أساس F من الجماعة $(f_i)_{1 \le i \le n}$ ؛ هذا ونستطيع أن نفرض أن الأشكال $f_1, \dots, f_r$ تكوّن أساساً لِـ F بعد إعادة ترقيم العناصر f_i إن دعت الحاجة لذلك . يتضح الآن أن شروط تطبيق النتيجة التالية محققة :

نظرية 5 - لتكن $f_1, \dots, f_n$ أشكالاً خطية على فضاء شعاعي M . نفرض أن $f_1, \dots, f_r$ مستقلة خطياً وأن لنا علاقات من الشكل :

$$(6) \qquad f_j = \varrho_{j1} f_1 + \dots + \varrho_{jr} f_r \; ; \quad r + 1 \le j \le n$$

بثوابت ϱ_{jk} في K . عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي لتقبل جملة المعادلات (5) على الأقل حلاً x في M هو أن تتحقق العلاقة :

$$(7) \qquad \beta_j = \varrho_{j1} \beta_1 + \dots + \varrho_{jr} \beta_r \; ; \quad r + 1 \le j \le n$$

وفي هذه الحالة تقبل الجملة (5) نفس حلول الجملة :

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \dots\dots\dots \\ f_r(x) = \beta_r \end{cases}$$

تعني العلاقات (6) أن لدينا :

$$(7 \text{ مكرر}) \qquad f_j(x) = \varrho_{j1} f_1(x) + \dots + \varrho_{jr} f_r(x)$$

من أجل كل x في M ؛ ولذا فمن الواضح أنه يوجد عنصر x يحقق العلاقات (5)، وعندها تكون العلاقات (7) محققة حتماً. فيما يخص القضية العكسية نفرض صحة العلاقات (7) ونعتبر حلّاً لِـ(8)؛ لدينا حينئذ حسب (7 مكرر) :

$$f_j(x) = \varrho_{j1}\beta_1 + \ldots + \varrho_{jr}\beta_r$$

وبمراعاة (7) نرى أن للجملتين (5) وَ (8) نفس الحلول.

ولما كانت الجملة (8) تقبل بالفعل حلولاً حسب النظرية السابقة فإن برهان النظرية 5 قد أنتهى.

ملاحظة 3 – إن العلاقات (7)، التي هي ضرورية وكافية لكي تقبل جملة المعادلات الخطية (6) على الأقل حلاً، علاقات تحمل اسم **شروط تلاؤم** الجملة (6) وَتبين النظرية 5 أنه حتى نجد حلول جملة معادلات خطية، نستطيع دوماً الرجوع (إذا تحققت شروط التلاؤم) إلى جملة معادلات أطرافها الأولى عبارات مستقلة خطياً. حتى تكون هذه النتيجة كاملة ينبغي أن نضم إليها النظرية 4 القائلة بأن كل جملة معادلات خطية مستقلة خطياً تقبل دوماً حلولاً.

نشير إلى أننا لم نفرض على M أن يكون ذا بعد منته في كل ما سبق؛ ذلك أن هذا الفرض لا يغير شيئاً في هذا السياق، وسوف لن نأخذه بعين الاعتبار إلّا حين نتناول النتائج الأكثر دقة الواردة في ف. 20.

4. وجود علاقات خطية.

نقدم فيما يلي نتيجة تعتبر من بين النتائج الأساسية في الجبر الخطي.

نظرية 6 – ليكن M، فضاء شعاعياً بعده منته، على حقل K. إن لكل أسس M أعداداً متساوية من العناصر.

ليكن $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ وَ $(b_j)_{1\leq j\leq q}$ أساسين لِـ M ؛ لنثبت أن $p = q$ يكفي أن نبين المتراجحتين $p \leq q$ وَ $q \leq p$ ؛ وبسبب التناظر تكفينا المتراجحة $q \leq p$ ، التي تأتي من النظرية التالية :

النظرية 7 - ليكن M فضاء شعاعياً بعده منته على حقل K و p عدداً صحيحاً بحيث يكون لِـ M أساس من p شعاع . حتى تكون عناصر من M ، عددها q ، مستقلة خطياً يجب أن تحقق المتراجحة $q \leq p$.

من الواضح أن عكس النظرية 7 غير صحيح .

ليكن $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ أساساً لِـ M وَ $b_1, ..., b_q$ عناصر من M ؛ سنبين وجود علاقة خطية غير تافهة بين الأشعة b_j بمجرد تحقق المتراجحة $q > p$ ، وهو ما سيثبت النظرية .

إذا كان $p = 0$ فالأمر الذي نريد إثباته تافه : ذلك أن $M = \{0\}$ في هذه الحالة ، وبما أن $q \geq 1$ فمن الواضح أن العناصر b_j تحقق مثلاً العلاقة :

$$1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_q = 0$$

نفرض الآن النظرية صحيحة من أجل $p - 1$ ، ونستنتج من ذلك أنها صحيحة من أجل p . ليكن M' الفضاء الجزئي لِـ M المولد بالأشعة $a_1, ..., a_{p-1}$ ؛ بما أن $a_1, ..., a_p$ تولد M فإن :

$$b_j = b'_j + \alpha_j a_p \qquad (1 \leq j \leq q) \tag{9}$$

حيث b'_j أشعة من M' وَ α_j أعداد سلمية من K . إذا كانت كل العناصر α_j منعدمة فإن العناصر b_j تنتمي كلها لِـ M' ؛ غير أن M' يقبل أساساً من $p - 1$ شعاع وعليه فالنظرية تنطبق على M' ؛ من جهة أخرى تستوجب العلاقة $q > p$ العلاقة $q > p - 1$ ، ومنه ندرك وجود علاقة خطية غير تافهة بين الأشعة b_j في هذه الحالة .

بقي علينا النظر في الحالة التي تكون فيها العناصر α_j غير منعدمة كلها ؛ لنفرض مثلاً أن :

$$\alpha_q \neq 0$$

وبالتالي فالعنصر α_q يقبل القلب لأن K حقل. تعطينا العلاقة الأخيرة من (9) إذن :

$$a_p = \alpha_q^{-1}(b_q - b'_q)$$

ومنه نستنتج أن العلاقات (9) الأخرى تكتب على الشكل التالي بعد التعويض وبعد حساب بسيط :

$$(10) \qquad b_j - v_j\, b_q = b'_j - v_j\, b'_q \qquad (1 \leq j \leq q - 1)$$

حيث : $v_j = \alpha_j\, \alpha_q^{-1}$.

تبين العلاقات (10) أن الأشعة $b_j - v_j\, b_q$ البالغ عدد $q - 1$ ، تنتمي إلى الفضاء الجزئي M' ؛ وبما أن $q > p$ يقتضي $q - 1 > p - 1$ فإن فرض التدريج يثبت وجود علاقة :

$$\lambda_1(b_1 - v_1\, b_q) + \ldots + \lambda_{q-1}(b_{q-1} - v_{q-1}\, b_q) = 0$$

حيث لا تنعدم كل الأعداد السلمية $\lambda_{q-1} ,\ldots, \lambda$ ؛ لكن هذه العلاقة تكتب أيضاً على النحو :

$$\lambda_1\, b_1 + \ldots + \lambda_q\, b_q$$

حيث $\lambda_q = -(\lambda_1\, v_1 + \ldots + \lambda_{q-1}\, v_{q-1})$. وهكذا بينا وجود علاقة خطية غير تافهة بين $b_1 ,\ldots, b_q$.

ملاحظة 4 - إن النظرية 7 لا تصلح فقط في حالة الفضاءات الشعاعية على حقل (تبديلي أو غير تبديلي) بل هي صالحة أيضاً في حالة المقاييس على حلقة تبديلية ؛ بالإمكان إثبات هذا القول بواسطة نظرية المعينات (نتيجة النظرية 5 ، ف 23) .

نتيجة - لتكن :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\, \xi_1 + \ldots + \alpha_{p1}\, \xi_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\, \xi_1 + \ldots + \alpha_{pn}\, \xi_p = 0 \end{array} \right.$$

جملة من n معادلة خطية متجانسة ومن p مجهول : $\xi_p ,\ldots, \xi$ معاملاتها

في حقل K . إذا كان $n < p$ (أي إذا تجاوز عدد المجاهيل عدد المعادلات) فالجملة (11) تقبل على الأقل حلاً غير تافه (أي تقبل حلاً تكون المجاهيل ξ_i فيه غير منعدمة كلها) .

لرؤية ذلك نعتبر العناصر :

$$a_i = (\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in})$$

من K^n البالغ عددها p ؛ من الواضح أن العلاقات (11) تكافئ العلاقة :

$$a_1 \xi_1 + ... + a_p \xi_p = 0$$

ولكي تقبل الجملة حلاً آخراً غير الحل : $\xi_1 = ... = \xi_p = 0$ يجب ويكفي إذن أن تكون الأشعة a_i غير مستقلة خطياً ؛ وهي بالفعل كذلك حينما يكون $n < p$ حسب النظرية 7 .

ملاحظة 5 - نستطيع أن نقدم الشرح الحدسي التالي للنتيجة السابقة : بما أن الجملة (11) تقبل دوماً الحل التافه :

$$\xi = ... = \xi_p = 0$$

فالأمر يعود إلى إيجاد افتراضات تضمن للجملة (11) على الأقل حلين ، أي تضمن ألّا تعين العلاقات (11) المجاهيل ξ_i تعييناً تاماً ؛ لكن إذا فرضنا على الأقل p شرطاً على p مجهول ξ_i فإنه غالباً ما نعين هذه المجاهيل تعيناً تاماً ، بينما يظل احتمال تعيينها انطلاقاً من شروط عددها أقل من p ، إحتمالاً ضعيفاً . . .

5. مفهوم البعد

ليكن M فضاء شعاعياً بعده منته على K ؛ يوجد حسب النظرية 6 ، عدد صحيح n معين تماماً بحيث يكون عدد عناصر كل أساس من أسس M يساوي n . يسمى العدد n **بعد** M **على الحقل** K (أو بعد M بدون إطالة

إذا لم نخش إشكالاً حول حقل الأساس) ، ونقول أيضاً أن M ذو بعد n على K ، ونرمز لبعد M على K بِـ :

$$\dim_K(M)$$

أو بِـ $\dim(M)$ إن لم يكن هناك إحتمال حدوث لبس حول حقل الأساس . إذا كان $M = \{0\}$ فإننا نأخذ $\dim(M) = 0$ إصطلاحاً .

ملاحظة 6 - يمكن النظر لفضاء شعاعي عقدي على أنه فضاء شعاعي حقيقي ؛ لدينا ي هذه الحالة العلاقة :

$$\dim_{\mathbf{R}}(M) = 2 \cdot \dim_{\mathbf{C}}(M)$$

(أنظر التمرين 15) ، وهي علاقة تنبهنا إلى أهمية تحديد حقل الأساس المعتبر .

ملاحظة 7 - بإمكاننا أيضاً تعريف مفهوم البعد في حالة الفضاءات الشعاعية ذات الأبعاد اللامنتهية ، ولكن هذا يتطلب منا استعمال نظرية الأعداد الأصلية (ب 5) ؛ إن الطريقة الأولية التي تقتصر على وضع $\dim(M) = +\infty$ كلما كان بعد M غير منته ، طريقة غير جديرة بالإهتمام ، ذلك أن هذا التعريف المبسط جداً ، لمفهوم البعد يجعل كل النتائج التي نهدف إلى إثباتها (وعلى رأسها تعميم النظرية 8 الواردة أدناه) غير صحيحة ؛ في حين أن من غايات تعريف ما ، إن لم نقل الغاية الوحيدة ، هو الوصول إلى نظريات(*) .

إن الأهمية الرئيسية لمفهوم البعد موجزة في النظرية التالية :

نظرية 8 - ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان على حقل K . لكي يكون L وَ M متشاكلين يجب ويكفي أن تحقق المساواة $\dim(L) = \dim(M)$.

(*) وهي الحالة التي نعيشها أحياناً في حياتنا اليومية . فإذا كان هدفنا مثلا هو إثبات أن «الجيش البولديفي لايطلق النار على البولديفيين» يكفي وضع التعريف التالي : «في بلاد بولديفيا ، البولديفيون هم ، تعريفاً ، الأشخاص الذي لا يطلق عليهم الجيش البولديفي النار» . إن لهذه الطريقة ، رغم فعاليتها المؤكدة ، نقطة ضعف خطيرة : فنحن نستطيع بالفعل ارجاعها إلى تعريف للجيش البولديفي نفسه .

إذا وجد تشاكل f من L على M ، فهو يطبق أساساً لِـ L على أساس لِـ M بحيث نجد أن $\dim(L) = \dim(M)$.

ومن جهة ثانية إذا أنطلقنا من المساواة الأخيرة. ورمزنا بِـ n للبعد المشترك لِـ L وَ M ، فإن L وَ M متشاكلان فيما بينهما لأن كل منها متشاكل مع K^n حسب النتيجة 1 للنظرية 3، ف 12.

ملاحظة 8 - إن القول بأن كل فضاءين شعاعيين، بعداهما غير منتهيين، متشاكلان قول خاطئ.

مثال 1 - من البديهي أن لدينا المساواة التالية مهما كان n .

$$\dim(K^n) = n$$

مثال 2 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ، ونرمز بِـ M للفضاء الشعاعي المؤلف من الأشعة التي لها نقطة بدء معلومة 0 في الفضاء المعتاد (المثال 2، ب 10) . لدينا $\dim(M) = 3$. لو أخذنا M تساوي مجموعة الأشعة التي يحملها مستوٍ معطى والمارة بنقطة معلومة 0 لوجدنا $\dim(M) = 2$. أخيراً لو نرمز بِـ M لمجموعة الأشعة التي يحملها مستقيم معطى والمارة بنقطة معينة 0 نجد أن $\dim(M) = 1$.

ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان، على حقل K ؛ لدينا :

$$\dim(L \times M) = \dim(L) + \dim(M)$$

وعلى وجه التحديد : إذا كان $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ وَ $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ أساسين لِـ L وَ M بالترتيب فإن الأشعة التالية البالغ عددها $p + q$ ، تشكل أساساً لِـ $L \times M$:

$$(a_1, 0), ..., (a_p, 0), (0, b_1), ..., (0, b_q)$$

مثال 3 - الفضاء الزمني الذي يعمل به الفيزيائيون هو مجموعة الثنائيات (x, t) حيث x شعاع نقطة بدئه 0 معلومة في الفضاء المعتاد، أما t فيرمز لعدد حقيقي يسمى الزمن. إذن فالفضاء الزمني هو الجداء الديكارتي $M \times \mathbf{R}$ حيث يرمز M للفضاء المعتاد. إذا نظرنا للفضاء الزمني كفضاء

شعاعي حقيقي نستنتج بسرعة بعده وهو $1 + 3 = 4$. إن العالم كوسينيس (Cosinus) قد اشتغل كثيراً من أجل لا شيء تقريباً .

ليكن L فضاء شعاعياً بعده n ، رأينا ضمن النظرية 1 ف . 16 أن ثنوي L يقبل أساساً مكوناً من n شعاع ؛ وبالتالي نحصل على المساواة :

$$\dim(L) = \dim(L^*)$$

نظرية 9 - ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته ، على حقل K ، وليكن M فضاء جزئياً من L وَ M° العمودي على M في L^* . لدينا حينئذ :

$$\dim(M) + \dim(M^\circ) = \dim(L)$$

لنضع $\dim(M) = p$ وَ $\dim(L) = r$ ؛ كما سبق أن رأينا أثناء البرهان على النتيجة 2 للنظرية 2 ، يوجد أساس $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ لِـ L بحيث يكون $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ أساساً لِـ M . تبين الملاحظة 2 من الفقرة 2 أن الفضاء الجزئي M° لِـ L^* يقبل أساساً من $r - p$ شعاع وعليه فبعده هو $r - p$ بذلك ينتهي البرهان .

نتيجة - ليكن M فضاء شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي L الذي له بعد منته ، على حقل . لدينا حينئذ :

$$\dim(M) \leq \dim(L)$$

ولا يمكن أن تتحقق المساواة $\dim(M) = \dim(L)$ إلا إذا كان $M = L$.

النقطة الأولى من هذه النتيجة تأتي مباشرة من النظرية 9. ثم أن نفس النظرية تثبت أن العلاقة $\dim(L) = \dim(M)$ تكافئ :

$$\dim(M^\circ) = 0$$

أي أنها تكافئ $M^\circ = \{0\}$ ؛ ونحن نعلم أن المساواة الأخيرة تكافئ $M = L$ (النتيجة 2 للنظرية 3) .

6. تمييز الأسس والأبعاد.

تعطي النظرية التالية تمييزات مفيدة لأسس فضاء شعاعي بعده منته :

نظرية 10 - لتكن $x_1, ..., x_n$ عناصر من فضاء شعاعي M على حقل K. إن الخاصيات التالية متكافلة :

أ) تكوّن الأشعة $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ أساساً لِـ M.

ب) الأشعة x_i مستقلة خطياً وبعد M يساوي n.

جـ) الأشعة x_i مستقلة خطياً وكل جزء حر من M لا يحتوي على أكثر من n عنصر.

د) تولد الأشعة x_i M وبعد M يساوي n.

ر) تولد الأشعة x_i M وكل جملة مولدات لِـ M لا تحتوي على أقل من n عنصر.

من الواضح أن أ) يستلزم ب).

لنبين أن ب) تستلزم جِ) نلاحظ أن كل جماعة حرة لابد أن تكون جزء من أساس لِـ M (النتيجة 1 للنظرية 2)، وبالتالي (النظرية 6) فإن هذه الجماعة تحتوي على n عنصر على الأكثر إن كان بعد M هو n.

لإثبات أن جِ) يستوجب د)، نعتبر عنصراً x في M ؛ بالاعتماد على جِ) نرى أن الأشعة $x_1, ..., x_n, x$ البالغ عددها $n + 1$ مقيدة بعلاقة غير تافهة :

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + \lambda x = 0$$

ولدينا $\lambda \neq 0$ ولولاه لحصلنا على علاقة غير تافهة بين العناصر x_i وهو ما يناقض جِ) ؛ وبالتالي فإن λ يقبل القلب، ومنه :

$$x = - \lambda^{-1} \lambda_1 \ x_1 - ... - \lambda^{-1} \lambda_n \ x_n$$

وهي علاقة تبين أن العناصر x_i تولد M، وبالتالي تشكل أساساً لِـ M وعليه فبعده يساوي n.

إن الخاصية د) تقتضي الخاصية ر) ذلك أن كل جملة مولدات لِـ M تحتوي على أساس لِـ M (النظرية 2) ، وبالتالي فهذه الجملة تحتوي على الأقل على n عنصر إذا كان $\dim(M) = n$.

لإنهاء البرهان علينا أن نبرهن على أن ر) تقتضي أ) ؛ نلاحظ أن النظرية 2 تبين أنه باستطاعتنا استخراج أساس لِـ M من الجماعة $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ؛ ثم أن هذا الأساس جملة من المولدات تحتوي على الأقل على n عنصر حسب ر) ؛ وعليه فإن هذا الأساس هو بالضرورة الجماعة $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ بأكملها . وهكذا اتضح أن هذه الجماعة تمثل أساساً لِـ M ، وبذلك ينتهي برهان النظرية .

نظرية 11 - ليكن M فضاء شعاعياً على حقل K وَ n عدداً صحيحاً . إن الخاصيات التالية متكافئة :

أ) بعد M يساوي n .

ب) n هو أكبر عدد صحيح يسمح باستخراج جماعة من M مؤلفة من n شعاع مستقلة خطياً .

ج) n هو أصغر عدد صحيح يسمح باستخراج جماعة من M مؤلفة من n شعاع تولد M .

يأتي تكافؤ الخاصيتين أ) وَ ب) من تكافؤ الخاصيتين أ) وَ جِ) في النظرية 10 . كما أن تكافؤ الخاصيتين أ) وَ ج) في النظرية 10 . كما أن تكافؤ الخاصيتين أ) وَ ج) من النظرية 11 ناتج عن تكافؤ الخاصيتين أ) وَ ر) من النظرية 10 .

نظرية 12 - لكي يكون فضاء شعاعي M على حقل K ذا بعد منته ، يجب ويكفي أن يوجد عدد صحيح n بحيث يكون عدد عناصر كل جزء حر من M يساوي n على الأكثر . لدينا حينئذ $\dim(M) \leq n$.

إن الشرط ضروري حسب النتيجة السابقة . لإثبات كفاية الشرط نفرض أنه محقق ، عندئذ نستطيع اعتبار أكبر عدد صحيح r بحيث يحتوي M

على جماعة من r شعاع مستقلة خطياً ؛ لدينا $r \leq n$ فرضاً وبعد M هو r حسب جـ) من النظرية 11 ؛ إذن فإن بعد M منته وَ $\dim(M) \leq n$.

7. بعدَا نواة وصورة تماثل .

إذا كانت حلقة الأساس حقلاً فإن صيغة النظرية 1 ، من ف 18 تصبح كالتالي :

نظرية 13 - ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين على حقل ، وَ f تماثلاً من L في M . إذا كان بعد L منتهياً فإن :

$$\dim(L) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

لرؤية ذلك نلاحظ أن بعد $\text{Ker}(f)$ منته ولذلك فهو متشاكل مع K^p حيث $p = \dim(\text{Ker}(f))$ ، كما أن بعد $Im(f)$ منته (إن صورة مقياس من صنف منته بواسطة تماثل هي أيضاً من صنف منته) ولذلك فهي متشاكلة مع K^q حيث $q = \dim(\text{Im}(f))$ ؛ للحصول على النظرية 13 يبقى إذن استعمال النظرية 1 من ف 18 .

ملاحظة 9 - إنه من غير الممكن أن نجد برهاناً للنظرية 13 أبسط من برهان النتيجة الشاملة الواردة في ف . 18 والتي أعطت النظرية 13 كحالة خاصة لها . لكنه من السهل جداً أن نعثر لها على براهين تجاوز تعقيدها تعقيد برهان النظرية 1 . ف . 18 . . .

إن لنتائج النظرية 13 التي سنعرضها الآن أهمية تعادل أهمية النظرية نفسها من الناحية العملية . وخاصة النتيجة التالية :

نتيجة 1 - ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان على حقل وَ f تماثلاً من L في M . نفرض أن $\dim(L) = \dim(M)$. عندئذ تصبح الخاصيات التالية متكافئة :

أ) f تقابل

ب) f غامر

ج) f تباين

د) لدينا $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

نعلم منذ طويل (النظرية 8، ف 7) أن الخاصيتين ج) وَ د) متكافئتان ومن جهة أخرى نلاحظ أن أ) عبارة عن الخاصيتين ب) وَ ج) معاً، وعليه فالأمر يعود إلى إثبات تكافؤ ب) وَ د) . لكن ب) [حسب نتيجة النظرية 9] تكافئ العلاقة :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(M) \tag{12}$$

أما د) فتكافئ :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \tag{13}$$

إن تكافؤ (12) وَ (13) يأتي من النظرية 13 ومن الفرض $\dim(L) = \dim(M)$ ومنه النتيجة المطلوبة. ı

نستعمل النتيجة 1 في أغلب الأحيان عندما يكون $L = M$. سنرى في الفصل القادم أنه بالإمكان التعبير عن هذه النتيجة بلغة نظرية جمل المعادلات الخطية.

نتيجة 2 - ليكن E وَ F فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي M بعده منته على حقل. لدينا عندئذ :

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

لنعتبر التماثل $f: E \times F \to M$ المعطى بالعلاقة : $f(x; y) = x + y$ (راجع الفقرة 3، ف 17) ؛ لدينا : $E + F = \mathrm{Im}(f)$ ، ومن جهة أخرى هناك تشاكل بين $\mathrm{Ker}(f)$ وَ $E \cap F$ (الملاحظة 1، ف 17) ؛ إذن :

$$\begin{aligned}\dim(E) + \dim(F) = \dim(E \times F) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))\\ &= \dim(E \cap F) + \dim(E + F)\end{aligned}$$

وهي العلاقة المطلوبة.

نتيجة 3 - لتكن $E_1, ..., E_r$ فضاءات شعاعية جزئية من فضاء شعاعي E بعده منته. لدينا:

$$\dim(E_1 + ... + E_r) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_r)$$

ولكي يكون طرفا هذه المتراجحة متساويين يلزم ويكفي أن تكون الفضاءات الجزئية $E_1, ..., E_r$ مستقلة خطياً.

لنعتبر التماثل:

$$f : E_1 \times ... \times E_r \to E_1 + ... + E_r$$

المعطى بـ:

$$f(x_1, ..., x_r) = x_1 + ... + x_r$$

إنه تماثل غامر ولذا ينتج عن النظرية 13 أن:

$$\dim(E_1 + ... + E_r) = \dim(E_1 \times ... \times E_r) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$$

$$= \dim(E_1) + ... + \dim(E_r) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$$

ومنه تأتي المتراجحة المطلوبة وتكون هناك مساواة إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$، وهذا يعني بالضبط (الفقرة 3، ف. 17) أن الفضاءات الجزئية E_i من E مستقلة خطياً.

8. مرتبة تماثل، مرتبة جماعة من الأشعة، مرتبة مصفوفة

ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان، وf تماثلا من L في M. مرتبة التماثل f هي، تعريفاً بعد الفضاء الجزئي $\mathrm{Im}(f) = f(L)$ لـ M.

لتكن $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ جملة مولدات لـ L، حينئذ يكون $\mathrm{Im}(f)$ مولداً عن الأشعة $x_i = f(a_i)$. وهكذا إنقدنا إلى تقديم المفهوم التالي: لتكن $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$

جماعة عناصر من فضاء شعاعي M (بعده منته أو غير منته)، إن مرتبة الجماعة (x_i) هي تعريفاً بعد الفضاء الجزئي لِـ M المولد عن العناصر x_i (نشير إلى أنه حتى لو كان بعد M غير منته، فإن بعد الفضاء الجزئي هذا منته دوماً).

لتكن r مرتبة الجماعة $(x_i)_{1\le i\le n}$ المؤلفة من عناصر تنتمي إلى فضاء شعاعي M ولنرمز بِـ M' للفضاء الجزئي من M المولد عن العناصر x_i. بالاستناد إلى النظرية 2 يتضح أنه بالإمكان استخراج أساس لِـ M' من الجماعة $(x_i)_{1\le i\le n}$، وهو أساس يحتوي بالضرورة على r عنصر. نستطيع إذن أن نفرض بأن العناصر $x_1, ..., x_r$ تشكل أساساً لِـ M'، وذلك بعد إعادة ترقيم العناصر x_i إذا لزم الأمر. وبالتالي فإن الأشعة $x_1, ..., x_r$ مستقلة خطياً ويمكن كتابة كل عنصر من M' على شكل عبارة خطية لهذه الأشعة؛ ومنه تأتي بصفة خاصة العلاقات:

$$x_j = \varrho_{j1}\, x_1 + ... + \varrho_{jr}\, x_r \qquad (14)$$

من أجل $r+1 \le j \le n$.

وإذا نظرنا للقضية العكسية وجدنا أن العلاقات (14) تستلزم أن الفضاء الجزئي المولد عن $x_1, ..., x_r$ يحتوي ليس فقط على هذه الأشعة بل أيضاً على $x_{r+1}, ..., x_n$ وعليه فإن $x_1, ..., x_r$ تولد M'؛ زيادة على ذلك إذا كانت $x_1, ..., x_r$ مستقلة خطياً فهي تشكل أساساً لِـ M'، وبذلك يكون بعد M' يساوي r، وبالتالي تكون مرتبة الجماعة $(x_i)_{1\le i\le n}$ تساوي r.

تنطبق هذه الإعتبارات بصفة طبيعية على الحالة التي يكون فيها M ثنوي فضاء شعاعي L؛ وتصبح العناصر x_i عندئذ أشكالاً خطية f_i على L، وهو الأمر الذي يسمح لنا بتعريف **مرتبة جماعة من الأشكال الخطية** على L؛ من الواضح أن هذا المفهوم هو الذي ورد ضمنياً في نص النظرية 5.

لتكن:

$$A = (\alpha_{ij})_{1\le i\le p,\, 1\le j\le n}$$

مصفوفة من p عمود و n سطر، معاملاتها في حقل K. مرتبة المصفوفة A هي تعريفاً مرتبة التماثل من K^p في K^n الممثل بالمصفوفة A (الملاحظة 1 في

الفقرة 3 ، ف 12) . إن صورة هذا التماثل هو الفضاء الشعاعي الجزئي من K^n المولد عن صور عناصر الأساس القانوني لِـ K^p ، أي المولد عن أعمدة المصفوفة A . إذن فمرتبة المصفوفة A هي بعد الفضاء الشعاعي الجزئي من K^n المولد عن أعمدة A البالغ عددها p .

نظرية 14 - ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان وَ f تماثلا من L في M وَ A مصفوفة f بالنسبة لأساس $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لِـ L والأساس $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ لِـ M . عندئذ تتساوى مرتبة f بمرتبة A .

لنعتبر التشاكلين :

$$v : K^n \rightarrow M \quad ; \quad u : K^p \rightarrow L \text{ ،}$$

اللذين يطبقان الأساسين القانونيين لِـ K^p وَ K^n على الأساسين المعتبرين لِـ L وَ M ؛ عندئذ تصبح مصفوفة A بالنسبة للأساسين القانونيين لِـ K^p وَ K^n (الملاحظة 2 ، الفقرة 3 ، ف 12) ممثلة بالتماثل :

$$v^{-1} \circ f \circ u : K^p \rightarrow K^n$$

أما مرتبة هذا التماثل فهي إذن تساوي مرتبة A تعريفاً . لكن لما كان u و v تقابلين فمن الواضح أن صورتي f وَ $v^{-1} \circ f \circ u$ متشاكلتان ، ومنه يأتي أن لهذين التماثلين نفس المرتبة . وهو المطلوب .

نظرية 15 - ليكن M فضاء شعاعياً بعده منته ، وَ $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ أساساً لِـ M وَ :

$$x_i = \alpha_{i1} b_1 + \ldots + \alpha_{in} b_n \qquad (1 \leq i \leq p)$$

جماعة من عناصر M . عندئذ تتساوى مرتبة الجماعة $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ ومرتبة المصفوفة $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$.

لرؤية ذلك يكفي تطبيق النظرية السابقة مع أخذ $L = K^p$ وباعتبار الأساس القانوني لِـ L . أما f فنعتبره التماثل الذي يطبق عناصر الأساس القانوني على الأشعة x_i المعطاة في النص ؛ إن هذه الأشعة تولد الفضاء الجزئي

$\text{Im}(f)$ بحيث أن مرتبة الجماعة (x_i) تساوي مرتبة f، أي مرتبة مصفوفة f، وهي المصفوفة (α_{ij}) بالضبط.

9. الحساب الفعلي لمرتبة مصفوفة.

تبين نتائج الفقرة السابقة أن حساب مرتبة تماثل أو جملة أشعة، يمكن إرجاعه إلى حساب مرتبة مصفوفة. تعد النظرية التالية النتيجة الأساسية فيما يخص هذا الموضوع:

نظرية 16 – لتكن $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i \le p,\, 1 \le j \le n}$ مصفوفة معاملاتها في حقل K. إن مرتبة A هي أكبر عدد صحيح r بحيث نستطيع استخراج مصفوفة مربعة قابلة للقلب رتبتها r، من A.

ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين بعداهما p وَ n بالترتيب على K؛ نختار أساساً $(a_i)_{1 \le i \le p}$ لِـ L وأساساً $(b_j)_{1 \le j \le n}$ لِـ M ونعتبر التماثل f من L في M الذي يقبل A كمصفوفة له بالنسبة للأساسين المختارين؛ إن مرتبة A تساوي مرتبة f، أي تساوي بعد $\text{Im}(f)$. نرمز بِـ r لهذه المرتبة؛ سنبين في البداية أننا نستطيع فعلاً استخراج مصفوفة مربعة قابلة للقلب رتبتها r، من المصفوفة A.

لدينا $\dim(\text{Ker}(f)) = p - r$ بفضل النظرية 13، وبالتالي يقبل $\text{Ker}(f)$ أساساً مشكلاً من $p - r$ شعاع: $c_1, \ldots, c_{p-r}$؛ بما أن الأشعة:

$$c_1, \ldots, c_{p-r}, a_1, \ldots, a_p$$

تولد L، ونظر لكون الأشعة الأولى $c_1, \ldots, c_{p-r}$ مستقلة خطياً، فإنه بالإمكان (النظرية 2) أن نشكل أساساً لِـ L بإضافة r شعاع من بين $a_1, \ldots, a_p$ إلى الأشعة $c_1, \ldots, c_{p-r}$؛ بتغيير ترقيم الأشعة $a_1, \ldots, a_p$ أي بتبديل أعمدة A فيما بينها إذا لزم الأمر، نستطيع أن نفرض أن الأشعة:

$$c_1, \ldots, c_{p-r}, a_1, \ldots, a_r$$

تشكل أساساً لِـ L . لنرمز بِـ L' للفضاء الجزئي من L المولد عن $a_1, ..., a_r$ ، لدينا :

$$L = \text{Ker}(f) \oplus L'$$

إذا كان $x = y + z$ حيث $y \in \text{Ker}(f)$ وَ $z \in L'$ فمن الواضح أن $f(x) = f(z)$ ؛ إذن $f(L') = \text{Im}(f)$ وبما أن $\text{Ker}(f) \cap L' = \{0\}$ فإن إقتصار f على L' تشاكل من L' على الفضاء الجزئي $\text{Im}(f)$ من M . ومنه نستنتج أن الأشعة :

$$f(a_1), ..., f(a_r)$$

تشكل أساساً لِـ $\text{Im}(f)$.

باستعمال النظرية 2 من جديد نستطيع أن نفرض بأن الأشعة :

$$f(a_1), ..., f(a_r), b_{r+1}, ..., b_n$$

تشكل أساساً لِـ M وهذا بعد إعادة ترقيم الأشعة b_j (أي تبديل سطور المصفوفة A) إن دعت الحاجة لذلك. لدينا عندئذ :

$$M = \text{Im}(f) \oplus M'' \qquad (15)$$

حيث يرمز M'' للفضاء الجزئي المولد عن $b_{r+1}, ..., b_n$. كما أن :

$$M = M' \oplus M'' \qquad (16)$$

حيث يرمز M' للفضاء الجزئي المولد عن $b_1, ..., b_r$. لنرمز بِـ u للتماثل من M على M' الموافق للتحليل (16) - أي إذا كان :

$$x = x'' + x'' \quad ; \quad x' \in M', x'' \in M''$$

نضع : $u(x) = x'$ (راجع الفقرة 4 ، ف 17) .

لدينا بداهة : $\text{Ker}(u) = M''$ ، ولما كان المجموع (15) مباشراً فإن :

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$$

وبالتالي فإن التطبيق من $\text{Im}(f)$ في M' المستخرج من u ، تطبيق متباين ؛ لكن :

$$\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim(M') = r$$

وعليه فهو تطبيق تقابلي (النتيجة 1 للنظرية 13) ؛

وقد بينا أن اقتصار f على L' يعطي تقابلا من L' على $\mathrm{Im}(f)$ ، ولذا يأتي أن التطبيق :

$$f' : L' \to M'$$

المعطى بـ :

$$f'(x) = u(f(x)) \quad ; \quad \forall x \in L'$$

تطبيق تقابلي ، أي أنه تشاكل ، وهو الأمر الذي يبين بأن مصفوفة f' بالنسبة للأساس $(a_1, ..., a_r)$ لـ L' وللأساس $(b_1, ..., b_r)$ لـ M' مصفوفة تقبل القلب (الفقرة 1 ، ف 15) . لنفرض أن $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n}$ ، حينئذ يأتي :

$$f(a_i) = \alpha_{i1}\, b_1 + ... + \alpha_{in}\, b_n$$

وبالتالي :

$$u(f(a_i)) = \alpha_{i1}\, b_1 + ... + \alpha_{ir}\, b_r$$

إذن فمصفوفة f' هي المصفوفة $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ المؤلفة من الأسطر الأولى لـ A وأعمدتها البالغ عددها r ، وبذلك نكون أثبتنا ، كما هو وارد في النص ، بأنه إذا كانت مرتبة A تساوي r فإننا نستطيع استخراج مصفوفة مربعة من A قابلة للقلب ورتبتها r .

ملاحظة 10 – بصفة عامة فإن المصفوفة $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ ليست هي المصفوفة القابلة للقلب ذلك أنه لا ينبغي أن ننسى ما فرضناه في البرهان السابق : فقد رخصنا إمكانية تبديل سطور وأعمدة المصفوفة A .

لإنهاء برهان النظرية بقي علينا أن نرى بأنه إذا كانت مرتبة A تساوي r وكنا نستطيع استخراج مصفوفة مربعة قابلة للقلب رتبتها s ، من A ، فإن لدينا بالضرورة $s \le r$.

لنفرض مثلاً أن المصفوفة $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le s}$ تقبل القلب ، ولنرمز بـ L'

للفضاء الجزئي من L الذي تولده العناصر $a_1, ..., a_s$ وبـ M' للفضاء الجزئي من M الذي تولده العناصر $b_1, ..., b_s$ وبـ M'' للفضاء الجزئي المولد عن $b_{s+1}, ..., b_n$ ، وبـ u للتماثل من M على M' الذي يتمثل في الإسقاط الموازي لـ M'' . عندئذ تصبح $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq s}$ مصفوفة التماثل f' من L' في M' المعطى بـ $f'(x) = u(f(x))$ من أجل x في L' ، وذلك بالنسبة للأساسين $(a_i)_{1 \leq i \leq s}$ وَ $(b_j)_{1 \leq j \leq s}$. لما كانت هذه المصفوفة تقبل القلب فرضاً فإن f تقابل وعليه فهو تباين واقتصار f على L' تباين حتماً ؛ وبالتالي فَـ f يطبق L' على فضاء جزئي له بعد L' أي s ، وهكذا تأكدنا من أن بعد $\text{Im}(f)$ يساوي s على الأقل ، بعبارة أخرى لدينا $s \leq r$ وبه يختتم البرهان .

ملاحظة 11 - إذا كان الحقل K تبديلياً ، فإن لنا بالإضافة إلى ما سبق قاعدة بسيطة جداً من الناحية النظرية ، تسمح بمعرفة فيما إذا كانت مصفوفة مربعة تقبل القلب أم لا : يكفي دراسة معينها (النتيجة 1 للنظرية 8 ، ف 23) .

مثال 4 - نعتبر في K^3 شعاعيين :

$$x' = (a', b', c'), \ \ x'' = (a'', b'', c'')$$

إن القول بأنهما مستقلان خطياً يعني أن مرتبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}$$

تساوي 2 ، أي أن هناك على الأقل مصفوفة من بين المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{pmatrix}$$

التي تقبل حتماً القلب . إن كان K تبديلياً فهذا يعني أن الأعداد السلمية :

$$b'c'' - b''c', \ a'c'' - a''c', \ a'b'' - a''b'$$

لا تنعدم في آن واحد (الفقرة 3 ، ف 15) .

نتيجة – إن مرتبة مصفوفة A معاملاتها في حقل، تساوي مرتبة المصفوفة المنقولة $'A$.

من الواضح أن المصفوفات المربعة المستخرجة من $'A$ هي منقولات المصفوفات المربعة المستخرجة من A؛ غير أنه إذا كانت مصفوفة مربعة تقبل القلب، فإن نفس الخاصية تتمتع بها منقولاتها، والعكس بالعكس.

10. حساب بعد فضاء شعاعي جزئي إنطلاقاً من معادلاته.

ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته ويساوي n، على حقل K، وليكن M فضاء شعاعياً جزئياً من L؛ كنا رأينا فيما تقدم (النتيجة 1 للنظرية 3) أنه توجد أشكال خطية f_i $(1 \le i \le m)$ على L بحيث يكون M هو مجموعة العناصر x من L التي تحقق العلاقات:

$$f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \qquad (17)$$

ومن جهة أخرى إذا نظرنا للقضية العكسية وجدنا أنه مهما كانت الأشكال الخطية f_i فالعلاقات (17) تعرف فضاء شعاعياً جزئياً M من L.

بعد هذا التقديم نعرض الآن كيفية حساب بعد M:

نظرية 17 – لتكن $f_1, \dots, f_m$ أشكالاً خطية على فضاء شعاعي L بعده منته ويساوي n، على حقل K. إن الفضاء الشعاعي الجزئي M من L المعرف بالعلاقات (17) له بعد يساوي $n - r$ حيث يرمز r لمرتبة الجماعة $(f_i)_{1 \le i \le m}$.

يمكن أن نفرض بأن $f_1, \dots, f_r$ مستقلة خطياً، وعندئذ تصبح لدينا علاقات من الشكل:

$$f_j = \varrho_{j1} f_1 + \dots + \varrho_{jr} f_r \qquad r+1 \le j \le m$$

ومنه يتضح أن حلول العلاقات (17) هي أيضاً حلول للعلاقات التالية:

$$f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0 \qquad (18)$$

وهو الأمر الذي يعود بنا إلى الحالة التي تكون فيها الأشكال f_i المعطاة، مستقلة خطياً.

نعتبر إذن التماثل $f: L \to K^r$ المعطى بـ:

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_r(x)\big)$$

من الواضح أن $M = \mathrm{Ker}(f)$، وبالتالي (النظرية 13) ينتج:

$$\dim(M) = n - \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

إذن فالقضية تنحصر في إثبات المساواة:

$$\dim\big((\mathrm{Im}(f)\big) = r = \dim(K^r)$$

وهذا يعني، بعبارة أخرى أن : $\mathrm{Im}(f) = K^r$ وهي مساواة ناتجة عن النظرية 4.

ف 20. المعادلات الخطية

1. رموز ومقارنات.

لتكن A حلقة معطاة. نسمي **جملة من n معادلة خطية، معاملاتها في K، وذات p مجهول**، كل جملة مؤلفة من علاقات من الشكل:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_{r1}\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{p1}\,\xi_p = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{pn}\,\xi_p = \beta_n \end{cases}$$

حيث تنتمي المعاملات α_{ij} والأطراف الثانية β_j إلى الحلقة K. **حل** (1) أو **حل (1) في الحلقة K**، إذا أردنا الإبتعاد عن الغموض، هو تعريفاً كل شعاع:

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in K^p$$

تحقق إحداثياته العلاقات (1).

لدراسة الجملة (1)، يكون من المفيد، بل من الضروري، إعتبارها من الزوايا الثلاث الآتية:

نعرف في البداية التماثل:

$$f : K^p \to K^n$$

الذي تمثله بالنسبة للأساسين القانونيين، المصفوفة:

$$(2) \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{p1} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{1n}, \ldots \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

باعتبار الشعاع :

$$b = (\beta_1, ..., \beta_n) \in K^n$$

يتضح من الفقرة 3 ، ف 12 أن حلول (1) ما هي سوى الأشعة x المنتمية لِـ K^p والتي تحقق العلاقة :

$$f(x) = b \tag{3}$$

ثانياً ، نطابق الشعاعيين x وَ b بالمصفوفتين العمودتيين

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

حينئذ تكتب الجملة (1) على النحو :

$$Ax = b \tag{4}$$

أخيراً نعرف الأشكال الخطية التالية على K^p :

$$f_j(\xi_1, ..., \xi_p) = \alpha_{1j}\,\xi_1 + ... + \alpha_{pj}\,\xi_p$$

حينئذ تكتب الجملة (1) على الشكل :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = \beta_n \end{array}\right. \tag{5}$$

نستعمل الرموز الواردة أعلاه دون شروح في كل ما سيأتي ، كما نفرض من الآن بأن K حقل .

2. مرتبة جملة معادلات خطية . شروط وجود الحلول .

مرتبة الجملة (1) هي تعريفاً المرتبة r لجماعة الأشكال الخطية $(f_j)_{1 \le j \le n}$ ؛ كما كانت إحداثيات f_j بالنسبة لأساس $(K^p)^*$ الثنوي للأساس القانوني لِـ

K^p ، أعداداً سلمية α_{ij} ، نرى (النظرية 15 ، 19) أن المرتبة التي نحن بصدد الكلام عنها ، تساوي مرتبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{p1} \dots \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

أي مرتبة منقولة المصفوفة A ؛ إذن (نتيجة النظرية 16 ، ف 19) فمرتبة الجملة (1) تساوي مرتبة المصفوفة A .

لتكن r هذه المرتبة ؛ اننا نستطيع أن نفرض بأن الأشكال $f_1, \dots, f_r$ مستقلة خطياً ، وذلك بعد إعادة ترقيم المعادلات (1) إن لزم الأمر ؛ ولذلك نجد علاقات من الشكل :

$$f_j = \varrho_{j1} f_1 + \dots + \varrho_{jr} f_r \quad ، \quad (r + 1 \leq j \leq n)$$

ومنه يأتي ، كما أثبتنا ذلك في الفقرة 3 ، ف 19 ، أن الجملة (15) تقبل حلولاً إذا وفقط إذا كانت شروط التلاؤم :

$$\beta_j = \varrho_{j1} \beta_1 + \dots + \varrho_{jr} \beta_r \qquad (r + 1 \leq j \leq n)$$

محققة . إذا كان الأمر كذلك فإن حلول (5) هي حلول

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} f_1(x) = \beta_1 \\ \dots\dots\dots \\ f_r(x) = \beta_r \end{cases}$$

وهكذا عدنا إلى دراسة الجمل التي تكون أطرافها الأولى أشكالاً خطية مستقلة خطياً ؛ إن لهذا النوع من الجمل حلاً على الأقل كما بينا ذلك في ف 19 (النظرية 4) .

3. الجمل المتجانسة الملحقة

إذا قبلت المعادلة (2) حلاً x على الأقل فإن الحلول الأخرى تكتب على الشكل $x + y$ حيث $f(y) = 0$ أي $y \in \mathrm{Ker}(f)$. نرى إذن أن عدد حلول (2) يتعلق بالمعادلة $f(y) = 0$ حسب النظرية 8 ، ف 7 .

إذا وضعنا $y = (\eta_1, ..., \eta_p)$ يتضح أن العلاقة $f(y) = 0$ تكتب على النحو :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + ... + \alpha_{p1}\eta_p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + ... + \alpha_{pn}\eta_p = 0 \end{cases} \qquad (1 \text{ مكرر})$$

نقول عن (1 مكرر) إنها **جملة المعادلات الخطية والمتجانسة الملحقة بالجملة** (1) ؛ **والحل التافه** لهذه الجملة هو الحل الذي من أجله نجد :

$$\eta_1 = ... = \eta_p = 0$$

نستطيع أيضاً كتابة (1 مكرر) على الشكل :

$$\begin{cases} f_1(y) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(y) = 0 \end{cases} \qquad (5 \text{ مكرر})$$

تشكل الحلول y لجملة المعادلات هذه فضاء شعاعياً جزئياً من K^p ، بعده يساوي $p - r$ ، حسب النظرية 17 ، ف 19 ، حيث يرمز r لمرتبة الجماعة $(f_i)_{1 \le i \le n}$.

4. جمل كرامر

نذكر أننا فرضنا على حلقة الأساس K أن تكون حقلاً حتى نهاية هذا الفصل .

نظرية 1 - إن الخاصيات التالية متكافئة :

أ) مهما كانت الأعداد السلمية $\beta_1, ..., \beta_n$ المنتمية لـ K فإن الجملة (1) تقبل حلاً وهذا الحل وحيد .

ب) لدينا $p = n$ والجملة المتجانسة الملحقة بالجملة (1) لا تقبل حلاً آخراً غير الحل التافه .

ج) لدينا $p = n$ والأشكال الخطية $f_1, ..., f_n$ مستقلة خطياً .

تنص الخاصية أ) على أن التماثل :

$$f : K^p \to K^n$$

تقابلي ؛ إذا كان الأمر كذلك فإن f تشاكل بحيث أن $\text{Ker}(f) = \{0\}$ وأن $\dim(K^p) = \dim(K^n)$ ، ومنه يأتي $p = n$ ؛ وهكذا نجد أن أ) تستلزم ب) . ننظر للقضية العكسية ونفرض أن f تباين و $p = n$ عندئذ نتأكد من أن f تقابلي حسب النتيجة 1 للنظرية 13 ، ف 19 ؛ إذن فالخاصية ب) تستلزم أ) .

نبين الآن أن أ) تستوجب ج) ؛ لقد رأينا أن أ) تقتضي $p = n$ ؛ إذا كانت :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$

علاقة خطية بين الأشكال f_i فإن :

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) \quad , \forall x \in K^p$$

ليكن x حلاً لـ(1) ، يأتي عندئذ :

$$\lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n = 0 \tag{7}$$

إذا كانت (1) تقبل حلاً مهما كانت قيم الأطراف الثانية فإن العلاقة (7) محققة مهما كانت العناصر β_j من K ، وهو ما يقتضي :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

تحققنا إذن من كون الخاصية أ) تستلزم الخاصية ج) (كان بمقدورنا أن نلاحظ أيضاً أنه إذا كانت العناصر f_i غير مستقلة خطياً ، فإن الجملة (5) لا تقبل حلولاً إلاّ إذا حققت العناصر β_i شروطاً غير تافهة وهي شروط التلاؤم الواردة في الفقرة 2) .

أخيراً علينا أن نبين بأن ج) يستلزم أ) . بالإستناد إلى الفقرة 2 أو النظرية 4 من ف 19 ، نرى أن الجملة (1) تقبل دوماً حلاً على الأقل ؛ وبالتالي نتأكد من أن التماثل f غامر ؛ لكن لما كان لـ K^p وَ K^n نفس البعد

فإن f متباين أيضاً ، وعليه تقبل (1) دوماً على الأقل حلاً ، وهو ما ينهي البرهان .

نسمي **جملة كرامر** كل جملة معادلات خطية تحقق الشروط أ) ، ب) ، ج) من النظرية 1 . إن الهدف الأساسي من هذا الفصل هو إثبات أن حل أية جملة معادلات خطية يرجع دوماً إلى حل جملة من جمل كرامر .

إذا علمنا مسبقاً أن $p = n$ (أي إذا تساوى عدد معادلات الجملة بعدد مجاهيلها) نستطيع استعمال النظرية التالية التي تعطي العديد من الخاصيات المميزة لجمل كرامر :

نظرية 2 - لتكن :

$$Ax = b \qquad (4)$$

جملة معطاة مؤلفة من n معادلة وعدد مجاهيلها يساوي n أيضاً ؛ إن الخاصيات التالية متكافئة :

أ) مهما كان العنصر b ، فإن الجملة (4) تقبل حلاً وحيداً .

ب) مهما كان العنصر b ، فإن الجملة (4) تقبل على الأقل حلاً .

ج) مهما كان العنصر b ، فإن الجملة (4) لا تقبل أكثر من حل واحد .

د) توجد قيمة لِـ b تجعل الجملة (4) تقبل حلاً وحيداً .

ر) لا تقبل الجملة المتجانسة $Ay = 0$ الملحقة بالجملة (4) حلاً آخراً غير الحل التافه $y = 0$.

س) إن المصفوفة A تقبل القلب .

بالإضافة إلى ذلك ، وإذا تحققت الشروط السابقة فإن حل الجملة (4) هو :

$$x = A^{-1} b$$

بكتابة الجملة (4) على الشكل $f(x) = b$ حيث يرمز f للتماثل الداخلي لِـ K^n الذي تمثله المصفوفة A ، وذلك بالنسبة للأساس القانوني ، نرى أن أ) تعني أن f تقابلي و ب) تعني أنه غامر ، وتعني ج) أنه تباين ، كما تعني ر)

أن $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ، وتعني س) أن f يقبل القلب في حلقة التماثلات الداخلية لِـ K^n (راجع الفقرة 2 ، ف 15) ؛ ولذا فتكافؤ الخاصيات أ) ، ب) ، ج) ، ر) ، س) ينتج عن النتيجة 1 للنظرية 13 من ف 19 .

ويتضح من جهة أخرى أن أ) تستلزم د) وأن د) تستلزم ر) كما يتجلى من خلال براهين الفقرة 2 .

لإنهاء البرهان يبقى أن نبين الدستور (8) ، إلاّ أن هذا الدستور بديهي .

مثال 1 - نفرض $n = 2$ ونفرض أن K تبديلي ؛ لدينا إذن جملة :

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

مؤلفة من معادلتين خطيتين ولها مجهولان x وَ y . تبين الفقرة 3 ، ف 15 أن المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ تقبل القلب إذا وفقط إذا كان :

$$ad - bc \neq 0$$

بحيث نلاحظ أن هذا الشرط يميز جمل كرامر في هذه الحالة . إذا تحقق هذا الشرط نرى بسهولة أن حل الجملة المعتبرة معطى بالدستورين :

$$x = \frac{du - bw}{ad - bc} \quad ; \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc}$$

تسمح نظرية المعينات ، كما سنرى ذلك في ف 24 ، بتعميم هذه الدساتير لتشمل جمل كرامر التي لها عدد كيفي من المعادلات ، أما معاملاتها فنفرضها في حقل تبديلي K .

والسؤال الذي يبقى مطروحاً بأكمله هو إيجاد دساتير صريحة لحساب مقلوب مصفوفة قابلة للقلب .

5. جمل المعادلات المستقلة: الرجوع إلى جمل كرامر

ندرس الآن الجملة (1) في الحالة التي تكون فيها الأشكال الخطية f_i $(1 \leq i \leq n)$ مستقلة خطياً، وهي الحالة التي يمكن الرجوع لها دوماً كما رأينا ذلك في الفقرة 2؛ لكننا لا نفرض هنا $p = n$. عندئذ يكون لدينا بالضرورة العلاقة :

$$n \leq p$$

ذلك أن العناصر $f_1, ..., f_n$ مستقلة خطياً فرضاً وهي تنتمي إلى فضاء شعاعي بعده p (أي إلى ثنوي K^p).

وبالتالي فرتبة المصفوفة $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ تساوي n (الفقرة 2) وعليه (النظرية 16، ف 19) نستطيع استخراج مصفوفة مربعة رتبتها n، من A؛ سنفرض من الآن أن المصفوفة :

$$\mathrm{U} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

تقبل القلب - هذا ونستطيع أن نحقق ذلك دوماً بتغيير ترقيم المجاهيل ξ_i إن لزم الأمر.

لنكتب الجملة (1) على الشكل :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{n1}\,\xi_n = \gamma_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{nn}\,\xi_n = \gamma_n \end{array}\right. \tag{9}$$

حيث وضعنا :

$$\gamma_j = \beta_j - (\alpha_{n+1,j}\ \ \xi_{n+1} + \dots + \alpha_{pj}\,\xi_p) \tag{10}$$

لما كانت المصفوفة U تقبل القلب فإن الجملة (9) من جمل كرامر بالنسبة للمجاهيل $\xi_1, ..., \xi_n$ ولذا فالجملة هذه تقبل حلاً وحيداً مهما كانت قيم الأطراف الثانية γ_i؛ غير أن هذه القيم لا تتعلق إلّا بالمجاهيل $\xi_{n+1}, ..., x_p$ وهو الأمر الذي يقتضي أن يكون للجملة (1) حل وحيد في الحالة التي تكون فيها قيم المجاهيل $\xi_{n+1}, ..., \xi_p$ معطاة سلفاً.

ومن جهة أخرى نلاحظ أن حل (9) معطى بالعلاقة :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

بوضع :

$$U^{-1} = (\nu_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

تأتي إذن العلاقة :

$$\xi_i = \nu_{1i} \gamma_1 + \dots + \nu_{ni} \gamma_n \tag{11}$$

وبتعويض العناصر γ_j بقيمها (10) تتحقق لدينا دساتير من النوع :

$$\xi_i = \nu_{1i} \beta_1 + \dots + \nu_{ni} \beta_n + \lambda_{n+1,i} \xi_{n+1} + \dots + \lambda_{pi} \xi_p$$

حيث $1 \leq i \leq n$ وحيث ترمز العناصر λ_{ki} لثوابت جديدة لا تتعلق إلاّ بالمعاملات α_{ij} للجملة (1).

لما كانت الجملة (1) تكافئ (9) وَ (10) معاً، ولمّا كانت (9) تكافئ (11)، فمن الواضح أن العلاقات (1) تكافئ مجموعة العلاقات (12)، أي :

نظرية 2 - نفرض أن الأشكال الخطية $f_1, \dots, f_n$ مستقلة خطياً نستطيع حينئذ ترقيم المجاهيل ξ_i بشكل يجعل الجملة (1) تقبل حلاً وحيداً مهما كانت القيم الكيفية المعطاة سلفاً للمجاهيل $\xi_{n+1}, \dots, \xi_p$. إذا كان الأمر كذلك توجد ثوابت ν_{ij} وَ λ_{ki} لاتتعلق إلاّ بالمعاملات α_{ij} للجملة (1) تجعل حلول الجملة (1) مساوية لكل المتتاليات $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ التي تحقق العلاقات (12).

مثال 2 - نعتبر جملة :

$$a' x + b' y + c' z = u'$$
$$a'' x + b'' y + c'' z = u''$$

مؤلفة من معادلتين وتضم ثلاثة مجاهيل. إن مرتبة الجملة هي 0 أو 1 أو 2.

إذا كانت هذه المرتبة هي 0، فإن :

$$a' = b' = c' = a'' = b'' = c'' = 0$$

والجملة تقبل حلاً في حالة $u' = u'' = 0$ لا غير (وهي الحالة التي تكون فيها المتتاليات (x, y, z) حلولاً بدون استثناء).

إذا كانت المرتبة تساوى 1 فذلك يعني أن المعاملات $a', \ldots, c''$ لا تنعدم كلها في آن واحد، وأن الشكلين الخطيين الظاهرين في الطرفين الأولين للجملة المعتبرة، متناسبان إذا كان K تبديلياً، فهذا يعني أيضاً (المثال 4، ف 19) أن:

$$b' c'' - b'' c' = a' c'' - a'' c' = a' b'' - a'' b' = 0 \tag{13}$$

لنفرض مثلاً: $a' \neq 0$؛ عندئذ تنتج لدينا علاقة من الشكل:

$$a'' x + b'' y + c'' z = \varrho (a' x + b' y + c' z)$$

ومنها يأتي بصفة خاصة: $a'' = \varrho a'$؛ إذن:

$$\varrho = a''/a'$$

تقبل الجملة في هذه الحالة حلاً إذا وفقط إذا كان: $u'' = \varrho u'$، أي إذا كان $u'' a' - u' a'' = 0$. إن كان الأمر كذلك فهذا يعود بنا إلى حل:

$$a' x + b' y + c' z = u'$$

وبما أن $a' \neq 0$ فإن الحل «العام» يعطيه الدستور:

$$x = \frac{u' - b' y - c' z}{a'}$$

وهو الدستور الذي يسمح لنا بإختيار y وَ z بصفة كيفية.

أخيراً إذا كانت الجملة من المرتبة 2، وإذا كان K تبديلياً فإن العلاقات (13) لا تتحقق كلها، لنفرض مثلا أن:

$$a' c'' - a'' c' \neq 0$$

بكتابة الجملة المعطاة على الشكل:

$$a' x + c' z = u' - b' y$$
$$a'' x + c'' z = u'' - b'' y$$

نرجع إلى جملة من جمل كرامر لِـ x وَ z ؛ أي أننا نستطيع إعطاء قيمة كيفية لِـ y ، عندئذ يكون حل الجملة المعطاة معرفاً بالدستورين التاليين :

$$x = \frac{c''(u' - b' y) - c'(u' - b'' y)}{a' c'' - a'' c'} = \frac{c'' u' - c' u''}{a' c'' - a'' c'} + \frac{c' b'' - c'' b'}{a' c'' - a'' c'} y$$

$$z = \frac{a' u'' - a'' u'}{a' c'' - a'' c'} + \frac{a'' b' - a' b''}{a' c'' - a'' c'} y$$

المعينات

كما أشرنا في مقدمة الفصول 18 ، 19 ، 20 فإن من بين الأهداف الأساسية للمعينات هو تقديم قواعد صريحة للإستقلال الخطي وكذلك دساتير صريحة لحل جمل المعادلات الخطية.

بدل الطريقة التقليدية التي تمثل في تعريف معين بواسطة دستور الفقرة 5 ، ف 23 ثم استنتاج خاصيات المعينات من هذا الدستور ، تبنّينا في عرض نظرية المعينات الطريقة «الهندسية» التي تعتمد على نظرية الأشكال المتعددة الخطية المتناوبة ؛ وهذه النظرية الأخيرة تمثل ، بخلاف النظرية الأولى ، في إيجاد قاعدة حساب المعينات إنطلاقاً من الخاصيات الأساسية للمعينات نفسها. كانت هذه الطريقة تدرس من طرف كرونيكار منذ ثمانين سنة خلت ، وهي تنتشر بصفة متزايدة منذ خمس عشرة سنة.

إن نظرية المقاييس التي عرضت في الباب III صالحة في الحالة التي تَكون فيها حلقة الأساس K كيفية ، أما نظرية المعينات فهي تفرض أن تكون K تبديلية. بل تتطلب بعضُ نتائج النظرية الأخيرة أن يكون K حقلاً تبديلياً ، ولم نفترض ذلك إلّا عند الضرورة. ونشير إلى أننا لا نحتاج في أغلب الحالات إلاّ لحسابات ميكانيكية للبرهان على الدساتير التي نرجو الوصول إليها ، ونحن لا نزيد الأمور تعقيداً (بل لنا من ورائها فائدة أكبر) إذا ما أثبتنا تلك الدساتير في حالة حلقة تبديلية كيفية بدل حقل حتى ولو كان هذا الحقل هو حقل الأعداد الحقيقية.

إذا ما استعصت على القارئ المبتدئ حسابات الفصل 23 فيمكنه أن ينتقل إلى الفصل 24 (ويسلّم بالنظرية 1) ويتدرب ، بواسطة التمارين ، على حساب المعينات ثم يرجع بعد ذلك إلى الفصل 23.

ف . 21. التوابع المتعددة الخطية

1. تعريف التطبيقات المتعددة الخطية.

ليكن X وَ Y و M مقاييس على حلقة تبديلية K . نقول عن تطبيق :

$$f: X \times Y \to M$$

أنه ثنائي الخطية إذا كان $f(x;b)$ تابعاً خطياً لِـ x في X من أجل كل b في Y ، وكان $f(a, y)$ تابعاً خطياً لِـ y في Y من أجل كل a في X ؛ ويعني ذلك أن لدينا المتطابقات :

$$f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y) \quad ; \quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$$

$$f(x, y' + y'') = f(x, y') + f(x, y'') \quad ; \quad f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

لتكن الآن X ، Y ، M مقاييس على حلقة K ، نقول عن تطبيق :

$$f: X \times Y \times Z \to M$$

إنه ثلاثي الخطية إذا كان $f(x, b, c)$ تابعاً خطياً لِـ x في X من أجل b في Y و c في Z ، وكان $f(a, y, c)$ تابعاً خطياً لِـ y في Y من أجل a في X وَ c في Z ، وكان $f(a, b, z)$ تابعاً خطياً لِـ z في Z من أجل a في X وَ b في Y .

بصورة عامة نعتبر المقاييس $X_1, ..., X_p$ وَ M على حلقة K نقول عن تطبيق من الشكل :

$$f: X_1 \times, ... \times X_p \to M$$

إنه **متعدد الخطية** (ونقول بعبارة أدق أنه p **الخطية**) إذا كان التطبيق :

$$x \to f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_p) \quad (2)$$

من X_i في M خطياً من أجل كل دليل i بحيث $1 \leq i \leq p$ ، ومهما كانت الأشعة :

$$a_1 \in X_1, ..., a_{i-1} \in X_{i-1}, a_{i+1} \in X_{i+1}, ..., a_p \in X_p$$

أي أن f يكون متعدد الخطية فيما إذا حصلنا لما نعطي لِـ $p - 1$ متغيراً قيماً ثابتة ، على تابع خطي للمتغير غير المثبت .

نستطيع التعبير عن هذا الشرط بدستورين يعممان (1) وهما :

$$(3)\ f(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i + x''_i, x_{i+1}, ..., x_p) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+}, ..., x_p) +$$

$$+ f(x_1, ..., x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, ..., x_p)$$

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, ..., x_p) = \lambda \cdot f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_p) \quad (4)$$

نرمز عادة لمجموعة التطبيقات المتعددة الخطية من $X_1 \times ... \times X_p$ في M بِـ :

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_p ; M)$$

تمثل هذه المجموعة مقياساً جزئياً من المقياس (المثال 4 ، ف 10) المؤلف من التطبيقات (المتعددة الخطية وغيرها) من المجموعة $X = X_1 \times ... \times X_p$ في M ؛ بعبارة أخرى إذا كان f وَ g متعددي الخطية فالأمر كذلك بالنسبة لِـ $\lambda f + \mu g$ مهما كان العددان السلميان λ وَ μ. تسمح هذه النتيجة (التي تأتي مباشرة من كون كل عبارة خطية لتطبيقات خطية ، التطبيقات من الشكل (2) مثلاً ، هي أيضاً تطبيق خطي) باعتبار المجموعة $\mathcal{L}(X_1, ..., X_p ; M)$ كمقياس على الحلقة K .

نسوق الآن بعض الأمثلة الهامة .

مثال 1 - نأخذ :

$$X_1 = ... = X_p = M = K$$

ونضع :

$$f(x_1, ..., x_p) = x_1 ... x_p$$

عندئذ نجد أن f متعدد الخطية بفضل مسلمات الحلقات التبديلية. نشير من جهة أخرى إلى وجه التشابه بين العلاقة (1) أو (3) والعلاقة التي تعبر عن توزيع الضرب بالنسبة للجمع.

مثال 2 - ليكن X وَ Y مقياسين على K؛ يسمى كل تطبيق ثنائي الخطية من $X \times Y$ في حلقة الأساس K **شكلاً ثنائي الخطية** على $X \times Y$. نعتبر مثلاً شكلاً خطياً u على X وشكلاً خطياً v على Y، حينئذ ندرك أن:

$$f(x, y) = u(x)\, v(y)$$

شكل ثنائي الخطية على $X \times Y$ لأننا إذا أعطينا لِـy قيمة ثابتة b، فإننا نحصل على العبارة $u(x)\, v(b)$ المتناسبة مع $u(x)$ ولذا فهي تابع خطي لِـx.

بصفة عامة، إذا كانت $X_1, \dots, X_p$ مقاييس على الحلقة K، يسمى كل تطبيق متعدد الخطية من $X_1 \times \dots \times X_p$ في K **شكلاً متعدد الخطية على** $X_1 \times \dots \times X_p$. إذا اخترنا شكلاً خطياً u_i على X_i من أجل كل i، ووضعنا:

$$f(x_1, \dots, x_p) = u_1(x_1) \dots u_p(x_p)$$

نجد شكلاً متعدد الخطية على $X_1 \times \dots \times X_p$. ويسمى **الجداء الموتري للأشكال الخطية** $u_1, \dots, u_p$ ونرمز له عموماً بِـ:

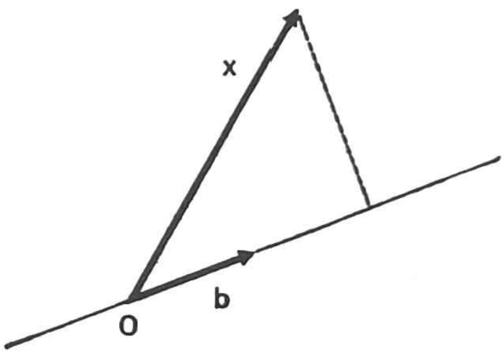
$$f = u_1 \otimes \dots \otimes u_p$$

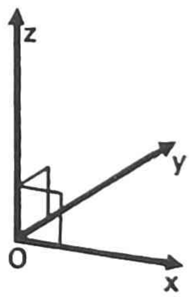
سنبين فيما بعد (النظرية 3) أنه إذا كانت $X_1, \dots, X_p$ مقاييس حرة ومن صنف منته على K فإننا نستطيع كتابة كل شكل متعدد الخطية على $X_1 \times \dots \times X_p$ في صيغة مجموع لجداءات موترية لأشكال خطية.

مثال 3 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونرمز بِـE للفضاء الشعاعي المؤلف من الأشعة التي نقطة بدئها نقطة معطاة 0 في الفضاء المعتاد المعرف بأبعاده الثلاثة. نختار وحدة طول كيفية، ونعرف **الجداء السلمي لشعاعيين** x وَ y: إنه العدد الذي يساوي جداء الطولين x وَ y وجيب تمام الزاوية المحصورة بين x وَ y. نرمز لهذا الجداء السلمي بواحد من الرموز التالية:

$$x \cdot y, (x, y), (x \mid y)$$

سنستعمل الرمز الثالث دون غيره في هذا الكتاب (نلاحظ أن الرمز الثاني لا يحق لنا استخدامه لأنه يرمز للثنائية المكونة من x وَ y) . إن العبارة $(x \mid y)$ شكل خطي على $E \times E$ ؛ لكي نبين أن $(x \mid b)$ تابع خطي لِـ x مثلاً ، نلاحظ أن هذا العدد يتناوب مع القياس الموجه للمسقط العمودي للشعاع x على المستقيم الذي يحمل الشعاع b . ونلاحظ أن العملية المتمثلة في الإسقاط على مستقيم ثابت ، خطية(*)





مثال 4 – K وَ E هما المجموعتان المعرفتان في المثال السابق ، نعتبر **الجداء الشعاعي لشعاعين** x وَ y :انه الشعاع z الذي له طول يساوي جداء طولي x وَ y ، وجيب زاويتهما أي أن هذا الطول يساوي مساحة متوازي الأضلاع المعرف بضلعيه x وَ y . أما إتجاه الشعاع z فهو عمودي على المستوى المعرف بِـ x وَ y ويجعل الزاوية الثلاثية xyz زاوية ثلاثية مباشرة أي وفق ما نص عليه أمبير وماكسويل (ليس لمفهوم الزاوية الثلاثية المباشرة معنى رياضي ؛

(*) نترك للقارئ مهمة تفصيل اعتبارات الهندسة الأولية التي أعتمدنا عليها في هذا المثال وفي الذي يليه .

والمفهوم الصحيح الوحيد هو مفهوم زاويتين ثلاثيتين من نفس التوجيه، ويمكن تعريف ذلك بواسطة نظرية المعينات كما سنرى في ف 23، ملاحظة 4) . نرمز للجداء الشعاعي لِـ x وَ y بِـ :

$$x \wedge y \quad \text{أو} \quad x\, X y$$

سنستعمل الرمز $x \wedge y$ دون غيره في المستقبل. بعد هذا يصبح من السهل أن نرى (على القارئ أن يبين ذلك كتمرين له) بأن التطبيق :

$$(x; y) \rightarrow x \wedge y$$

من $E \times E$ في E تطبيق ثنائي الخطية.

نلاحظ أن لدينا دستوري التبديل التاليين :

$$(x \mid y) = (y \mid x) \quad ; \quad x \wedge y = -\, y \wedge x$$

مثال 5 - المجموعتان K وَ E هما المعرفتان أعلاه، يسمى العدد :

$$(x \mid y \mid z) = (x \mid y \wedge z)$$

جداء مختلطاً للأشعة x، y، z، وهو عبارة عن الجداء السلمي لِـ x وللجداء الشعاعي $y \wedge z$. من جهة أخرى يمثل هذا الجداء تابعاً ثلاثي الخطية لِـ x، y، z. أما قيمته المطلقة فتساوي حجم متوازي الوجوه المرسوم على الأشعة x، y، z، كما نلاحظ أن إشارة $(x \mid y \mid z)$ موجبة فيما إذا كانت الزاوية المثلثية xyz مباشرة، وتكون إشارته سالبة فيما إذا كانت الزاوية المثلثية xyz رجعية. ومنه تأتي العلاقات :

$$(x \mid y \mid z) = (y \mid z \mid x) = (z \mid x \mid y) = -\,(x \mid z \mid y) = -\,(y \mid x \mid z) = -\,(z \mid y \mid x)$$

مثال 6 - لتكن K حلقة تبديلية كيفية و X مقياساً على K وَ X^* مقياسه الثنوي (الفقرة 1، ف 16) . ليكن p وَ q عددين صحيحين موجبين أو منعدمين، يسمى كل تطبيق $(p + q)$ الخطية من :

$$(X^*)^p \times X^q = \underbrace{X^* \times \dots \times X^*}_{p \text{ مرّة}} \times \underbrace{X \times \dots \times X}_{q \text{ مرّة}}$$

في حلقة الأســاس K وترة متغايرة p مرة ومتغيرة عكسياً q مرة ويسمى أيضاً وترة من النوع $\binom{p}{q}$. إذن فهذا التطبيق تابع $f(u_1, ..., u_p, x_1, ..., x_q)$ قيمه في K، ومعرف عندما تكون $u_1, ..., u_p$ أشكالاً خطية على X وَ $x_1, ..., x_q$ أشعة من X، ثم أن هذا التابع يتعلق خطياً بكل متغير من المتغيرات $u_1, ..., u_q$. بصفة خاصة تسمى كل وترة من النوع $\binom{0}{q}$ **شكلاً q الخطية على X**، أي أنه يطلق هذا الاسم على كل تطبيق متعدد الخطية من X^q في K.

من بين الوترات على X نجد الأشكال الخطية على X: فهي الوترات من النوع $\binom{0}{1}$. ومن جهة أخرى، يعرف كل شعاع x من X وترة على X من النوع $\binom{1}{0}$ أي أنه يعرف شكلاً خطياً على X^* وهو الشكل الخطي $u \rightarrow u(x)$ المستعمل في الفقرة 3، ف 16 «الوصل» مقياس بثنويه المكرر. إذا كان X حراً ومن صنف منته فإن الصلة الموجودة بين عناصر X والوترات من النوع $\binom{1}{0}$ صلة تقابلية (النظرية 2 ف 16)، وهو الأمر الذي يرخص لنا بمطابقة هذين المفهومين، ذلك ما يجرى به العمل في الفيزياء خاصة.

يعطي معظم الفيزيائيين تعريفاً للوترة، معقداً أكثر من تعريفنا الســابق (في حالة الفضــاءات الشعاعية على $\mathbf{R}$، ذات البعد الصغير)، سنرجع لهذا التعريف فيما بعد (ملاحظة 3، الفقرة 5). ومن ناحية ثانية نشير إلى أن اهتمام الفيزيائيين مركز على **حقول الوترات**، وهو الأسم الذي يطلق على كل تطبيق من الفضــاء الشعاعي X المعتبر، في مجموعة الوترات على X التي لها نوع معين سلفاً - أي كل تطبيق على X تكون قيمته عند كل نقطة من X وترة على X من نوع معطى. لقد ظل استعمال الوترات في الفيزياء عسير الفهــم خلال مدة طويلة لأن المستعملين لم يكن يميزوا بين وترة (بالمعنى المعطى هنا) وبين تابع يأخذ قيمه في مجموعة الوترات؛ وهو الخطأ الذي جعلهــم في وضع شبيه بذلك الذي يقف عنده من يتكلم عن التوابع ذات القيم الشعاعية دون أن يعرف قبل هذا وذاك مفهوم الشعاع... وينبغي أن نلاحظ بهذا الصدد، كتبرئة للفيزيائيين، أن مفهوم الأشكال الخطية على فضــاء شعاعي (والذي يستحيل، تقريباً، بدونه إعطاء تعريف بسيط للوترات) لم ينتشر بالفعل في الرياضيات إلاّ منذ حوالي سنة 1930.

2. الجداء الموتري للتطبيقات المتعددة الخطية.

ليكن:

$$f : X_1 \times ... \times X_p \to K$$
$$g : Y_1 \times ... \times Y_q \to K$$

شكلين متعددي الخطية. الجداء الموتري لِـ f وَ g هو تعريفاً، التطبيق:

$$f \otimes g : X_1 \times ... \times X_p \times Y_1 \times ... \times Y_q \to K$$

المعطى بالعلاقة:

$$f \otimes g\,(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_1) = f(x_1, ..., x_p)\; g(y_1, ..., y_q) \qquad (5)$$

وهو تطبيق متعدد الخطية أيضاً لأننا إذا أعطينا مثلاً القيم الثابتة $a_2, ..., b_q$ لِـ $x_2, ..., y_q$ حصلنا على العبارة:

$$f(x_1, a_2, ..., a_p)\; g(b_1, ..., b_q)$$

المتناسبة، كتابع لِـ x_1، مع $f(x_1, a_2, ..., a_p)$، وعليه فهي تابع خطي لِـ x_1 مثل التابع الأخير.

إذا كانت لدينا ثلاثة أشكال متعددة الخطية f، g، h فإن العلاقة التجميعية التالية محققة:

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

وقيمة كل طرف منها تساوي التابع:

$$f(x_1, ..., x_p) g(y_1, ..., y_q)\; h(z_1, ..., z_r)$$

كما نرى ذلك مباشرة.

كل ذلك يسمح لنا بتعريف الجداءات الموترية لعدد كيفي من الأشكال المتعددة الخطية، وبتعميم المفهوم الذي أدخلناه في المثال 2 الوارد أعلاه، والخاص بالأشكال الخطية.

ننبه إلى أن الدستور :

$$f \otimes g = g \otimes f$$

خاطئ حتى ولو كان طرفاه من نفس النوع . فإن كان مثلاً f وَ g شكلين خطيين على مقياس X فإن :

$$f \otimes g(x, y) = f(x)\, g(y)$$
$$g \otimes f(x, y) = f(y)\, g(x)$$

وليس هناك أي سبب يخول لنا القول بأن هذين العبارتين متساويتان .

مثال 7 - نعتبر على مقياس X وترة f من النوع $\binom{p}{q}$ ووترة g من النوع $\binom{r}{s}$؛ عندئذ يكون $f \otimes g$ شكلاً متعدد الخطية على الجداء الديكارتي :

$$(X^*)^p \times X^q \times (X^*)^r \times (X)^s$$

إننا نطابق عموماً هذا الجداء بالجداء :

$$(X^*)^{p+r} \times (X)^{q+s}$$

وهو الأمر الذي يسمح باعتبار $f \otimes g$ وترة من النوع $\binom{p+r}{q+s}$ على X ، معطاة بالعلاقة :

$$f \otimes g(u_1, ..., u_{p+r}, x_1, ..., x_{q+s}) =$$

$$= f(u_1, ..., u_p, x_1, ..., x_q)\, g(u_{p+1}, ..., u_{p+r}, x_{q+1}, ..., x_{q+s})$$

مهما كانت العناصر u_i من X^* والعناصر x_j من X . نقول عن $f \otimes g$ إنه الجداء الموتري للوترتين f وَ g . نعتبر مثلاً شعاعين a وَ b في X وثلاثة أشكال خطية f ، g ، h في X^* ؛ نطابق a وَ b بوترتين (المثال 6) ، عندئذ نستطيع تعريف الوترة $\varphi = a \otimes b \otimes f \otimes g \otimes h$: فهي متغايرة مرتين ومتغيرة عكسياً ثلاث مرات ، أي أنها تابع متعدد الخطية لشكلين خطيين u و v في X^* ولثلاثة أشعة x ، y ، z في X ؛ هذا ونتأكد بسهول من أن لدينا :

$$\varphi(u, v, x, y, z) = u(a)\, v(b)\, f(x)\, g(y)\, h(z)$$

ملاحظة 1 - في تعريف $f \otimes g$ بواسطة الدستور (5)، كان لزاماً أن تكون المتغيرات y_j مستقلة عن المتغيرات x_i ولولاه لما حصلنا على تابع متعدد الخطية. فمثلاً إذا كان f وَ g شكلين خطيين على مقياس L، فإن العبارة $f(x)\,g(y)$ شكل ثنائي الخطية على $L \times L$ لكن التابع $f(x)\,g(x)$ ليس شكلاً خطياً على L عموماً.

3. بعض المتطابقات الجبرية.

عندما نريد إجراء حسابات جبرية في حلقة، فإننا نتعرض في أغلب الأحيان إلى حساب جداء يكون كل حد فيه مجموعاً لحدود أخرى، ونقوم عندئذ «بتحليل» هذا الجداء وفق القاعدة التالية: لضرب مجاميع في مجاميع أخرى نختار بصفة كيفية حداً في كل مجموع، ثم نضرب الحدود المختارة بعضها في بعض، أخيراً نجمع النتائج التي نحصل عليها بهذه الطريقة. بإمكاننا صياغة هذه القاعدة في دساتير؛ فإذا كانت مثلاً، $(x_i)_{i\in I}$ وَ $(y_j)_{j\in J}$ جماعتين منتهيتين من عناصر حلقة K، فإن:

$$\sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} y_j = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} x_i\, y_i \tag{6}$$

وإذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ وَ $(y_j)_{j\in J}$ وَ $(z_k)_{k\in K}$ جماعات منتهية من عناصر حلقة، فإن لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} y_j \sum_{k\in K} z_k = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}} x_i\, y_i\, z_k \tag{7}$$

بصفة عامة إذا كانت لدينا جماعات منتهية، عددها p، وعناصرها في حلقة، ورمزنا لهذه الجماعات بِـ: $(x_{1i_1})_{i_1\in I_1}, \dots, (x_{pi_p})_{i_p\in I_p}$ فإن:

$$\sum_{i_1\in I_1} x_{1i_1} \dots \sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p} = \sum_{i_1\in I_1,\dots,i_p\in I_p} x_{1_{i_1}} \dots x_{pi_p} \tag{8}$$

ملاحظة 2 - نتعرض في العديد من المرات إلى حالة $I = J$ في الدستور (6)،

ويرمز للجماعتين المفروضتين عندئذ بـ : $(x_i)_{i\in I}$ وَ $(y_i)_{i\in I}$ ؛ علينا أن نتجنب في هذه الظروف كتابة العلاقة (6) على الشكل :

$$\sum_{i\in I} x_i \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} x_i\, y_i$$

لأن هذه العلاقة خاطئة بداهة - ذلك أنه من غير المعقول أن نعتقد بأن العلاقة الموالية صحيحة دوماً :

$$(x' + x'')(y' + y'') = x'\, y' + x''\, y'' \ldots$$

إن أقوم طريقة ، وهي الوحيدة ، لتفادي مثل هذه الأخطاء هو ألّا نرمز أبداً بنفس الحرف لدليلات جمع ظاهرة في مجموعين مختلفين . علينا كذلك أن نتذكر دائماً بأن نتيجة الجمع لا تحمل دليلاً من دليلات الجمع إلاّ ظاهراً ، وذلك أن الدور الذي تلعبه هذه الدليلات ليس سوى إختصار يهدف إلى إظهار عملية نطلب إجراءها ، ولذا نستطيع دوماً تعويض أي دليل بأي حرف آخر لم يستعمل بعد . فإذا كانت لدينا مثلاً عناصر $x_1, \ldots, x_n$ من زمرة جمعية ، فإن العبارات التالية متطابقة :

$$\sum_{1\le i\le n} x_i \ , \quad \sum_{1\le h\le n} x_h \quad , \quad \sum_{1\le \lambda\le n} x_\lambda$$

نستطيع أن نبين دساتير مماثلة لِـ(6) ، (7) ، (8) خاصة بالتطبيقات المتعددة الخطية ، والسبب في ذلك هو أن متطابقات «توزيع الضرب بالنسبة للجمع» التي استلزمت (6) ، (7) ، (8) لا تزال متطابقات صالحة ، تعريفاً ، في حالة التطبيقات المتعددة الخطية .

نعتبر مثلاً مقاييس X ، Y ، M على حلقة تبديلية K ، وتطبيقاً ثنائي الخطية f من $X \times Y$ في M . لتكن $(x_i)_{i\in I}$ جماعة منتهية من عناصر X و $(y_j)_{j\in J}$ جماعة منتهية من عناصر Y ، لدينا عندئذ العلاقة :

$$f\Big(\sum_{i\in I} x_i, \sum_{j\in J} y_j\Big) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(x_i\,, y_j) \qquad \text{(6 مكرر)}$$

لرؤية ذلك نضع :

$$a = \sum_{i \in I} x_i \, ; \; f_a(y) = f(a, y)$$

لما كان f ثنائي الخطية فإن f_a خطي من Y في M ، ولذا :

$$f\left(a, \sum_{j \in J} y_j\right) = f_a\left(\sum_{j \in J} y_j\right) = \sum_{j \in J} f_a(y_j) = \sum_{j \in J} f(a, y_j)$$

ثم بوضع $f_j(x) = f(x, y_j)$ نحصل ، لنفس السبب ، على تطبيق خطي من X في M بحيث نجد :

$$f(a, y_j) = f_j(a) = f_j\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} f_j(x_i) = \sum_{i \in I} f(x_i, y_j)$$

بنقل النتيجة الأخيرة في التي سبقتها نحصل مباشرة على (6 مكرر) .

لتكن أيضاً X ، Y ، Z ، M مقاييس على K وَ f تطبيقاً ثلاثي الخطية من $X \times Y \times Z$ في M . عندئذ إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ وَ $(y_j)_{j \in J}$ وَ $(z_k)_{k \in K}$ جماعات منتهية من عناصر X ، Y ، Z بالترتيب فإن لدينا العلاقة :

$$f\left(\sum_{i \in I} x_i \, , \sum_{j \in J} y_j \, , \sum_{k \in K} z_k\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J \\ k \in K}} f(x_i \, , y_j \, , z_k) \qquad \text{(7 مكرر)}$$

لرؤية ذلك نضع :

$$c = \sum_{k \in K} z_k \, , \; f_c(x, y) = f(x, y, c)$$

من الواضح أن f_c ثنائي الخطية ، نطبق (6 مكرر) على f_c فنجد أن الطرف الأيسر من (7 مكرر) يساوي :

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f_c(x_i \, , y_j) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f\left(x_i \, , y_j, \sum_{k \in K} z_k\right)$$

لكن التطبيق :

$$f_{ij}(z) = f(x_i, y_i, z)$$

من Z في M خطياً، ولما كان الحد العام للمجموع الذي كتبناه آنفاً يساوي قيمة f_{ij} على الشعاع $\sum z_k$ فإننا نرى بأن هذا الحد يساوي :

$$\sum_{k\in K} f_{ij}(z_k) = \sum_{k\in K} f(x_i, y_j, z_k)$$

أخيراً نرى أن الطرف الأيسر من (7 مكرر) يساوي :

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \sum_{k\in K} f(x_i, y_j, z_k) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}} f(x_i, y_j, z_k)$$

وهو ما يثبت (7 مكرر) .

لتعميم (8) نعتبر تطبيقاً p الخطية :

$$f: X_1 \times \dots \times X_p \to M$$

ونختار في كل مقياس X_h $(1 \leq h \leq p)$ جماعة منتهية من الأشعة، نرمز لها بـ (x_{hi_h}) $i_h \in I_h$؛ نصل عندئذ إلى المتطابقة :

$$f\left(\sum_{i_1\in I_1} x_{1i_1}, \dots, \sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p}\right) = \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\\ i_p\in I_p}} f(x_{1i_1}, \dots, x_{pi_p}) \quad \text{(8 مكرر)}$$

تثبت هذه المتطابقة بالتدريج على p؛ نبدأ بوضع :

$$c = \sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p}, \quad f_c(x_1, \dots, x_{p-1}) = f(x_1, \dots, x_{p-1}, c)$$

فنحصل على تطبيق $(p-1)$ الخطية f_c؛ لنكتب الدستور المماثل لـ (8 مكرر) الخاص بـ f_c :

$$f_c\Big(\sum_{i_1\in I_1} x_{1i_1}, \ldots, \sum_{i_{p-1}\in I_{p-1}} x_{p-1,i_{p-1}}\Big) = \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\cdots \\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} f_c(x_{1i_1}, \ldots, x_{p-1}, i_{p-1})$$

$$= \sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\cdots \\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} f_{i_1 \ldots i_{p-1}}\Big(\sum_{i_p\in I_p} x_{pi_p}\Big)$$

حيث وضعنا من أجل كل x في X_p :

$$f_{i_1 \ldots i_{p-1}}(x) = f(x_{1i_1}, \ldots, x_{p-1}, i_{p-1}, x)$$

نلاحظ أن العبارة الأخيرة تابع خطي لِـ x ، ولذا ندرك أن الطرف الأيسر من (8 مكرر) يساوي :

$$\sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\cdots \\ i_{p-1}\in I_{p-1}}} \sum_{i_p\in I_p} f_{i_1 \ldots i_{p-1}}(x_{pi_p})$$

وبما أن :

$$f_{i_1 \ldots i_{p-1}}(x_{pi_p}) = f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p})$$

فإننا نحصل بالتأكيد على (8 مكرر) .

من جهة أخرى نلاحظ أن حلقة الأساس K لم تدخل قط في هذه الدساتير ، أي أننا لم نستعمل سوى المتطابقة (3) من الفقرة 1 ، دون المتطابقة (4) . حتى ندخل هذه الأخيرة في (8 مكرر) نختار زيادة عما سبق جماعات :

$$(\lambda_{1i_1})_{i_1\in I_1}, \ldots, (\lambda_{pi_p})_{i_p\in I_p}$$

من عناصر K ، ونعوض في (8 مكرر) كل شعاع (x_{hi_h}) بِـ $\lambda_{hi_h}\cdot x_{hi_h}$ ؛ فيصبح الحد العام من الطرف الأيمن لِـ (8 مكرر) معوضاً بِـ :

$$\lambda_{1i_1} \ldots \lambda_{pi_p}\ f(x_{1i_1}, \ldots, x_{pi_p})$$

ذلك لأن لدينا العلاقة التالية :

$$f(\xi_1 x_1, \ldots, \xi_p x_p) = \xi_1 \ldots \xi_p\ f(x_1, \ldots, x_p) \tag{9}$$

بعد كل هذا نرى بأن (8 مكرر) تقودنا إلى الدستور التالي وهو أعم من (8 مكرر) :

$$f\left(\sum_{i_1\in I_1}\lambda_{1i_1}x_{1i_1},\ldots,\sum_{i_p\in I_p}\lambda_{pi_p}x_{pi_p}\right)=\sum_{\substack{i_1\in I_1\\ \cdots\cdots\\ i_p\in I_p}}\lambda_{1i_1}\ldots\lambda_{pi_p}\,f(x_{1i_1},\ldots,x_{pi_p}) \tag{10}$$

إنه يسمح بحساب قيم f على عبارات خطية من الأشعة . إذا كان $p = 2$ فإن هذا الدستور يكتب أيضاً على النحو :

$$f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\,x_i,\ \sum_{j\in J}\mu_j\,y_j\right)=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\lambda_i\,\mu_j\,f(x_i\,,y_j) \tag{11}$$

وإذا كان $p = 3$ نحصل على :

$$f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\,x_i,\ \sum_{j\in J}\mu_j\,y_j,\ \sum_{k\in K}\nu_k\,z_k\right)=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ k\in K}}\lambda_i\,\mu_j\,\nu_k\,f(x_i\,,y_j\,,z_k) \tag{12}$$

4. حالة المقاييس الحرة من الصنف المنتهي .

تسمح دساتير الفقرة السابقة بتعيين التطبيقات الخطية عندما تكون مقاييس الإنطلاق $X_1,\ldots,X_p$ حرة ومن صنف منته (مثلاً عندما يتعلق الأمر بفضاءات شعاعية ذات بعد منته، على حقل، وهي الحالة الأكثر أهمية من الناحية العملية) .

نتناول في البداية أبسط حالة وهي التي يكون فيها : $p = 2$:

نظرية 1 - لتكن X ، Y ، M مقاييس على حلقة تبديلية K . نفرض أن X وَ Y حران ومن صنف منته، وليكن $(a_i)_{1\le i\le m}$ أساساً لِـ X وَ $(b_j)_{1\le j\le n}$ أساساً لِـ Y . لكي يكون تطبيق f من $X\times Y$ في M ثنائي الخطية، يجب ويكفي أن توجد عناصر c_{ij} من M بحيث :

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij} \tag{13}$$

مهما كان الشعَاعان :

$$x = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi_i \, a_i \in X$$

وَ

$$y = \sum_{1 \leq j \leq n} \eta_j \, b_j \in Y$$

ثم إذا كان الأمر كذلك فلدينا حتماً :

$$c_{ij} = f(a_i , b_j) \tag{14}$$

تبين العلاقة (11) أنه إذا كان f ثنائي الخطية فيجب أن تتحقق العلاقة :

$$f(x, y) = \sum \xi_i \, \eta_j \, f(a_i , b_j)$$

بحيث نجد أن f معطى بالفعل بدستور من النوع (13) . إذا نظرنا للقضية العكسية وفرضنا أن f معطى بِـ(13) ، وأردنا أن نبرهن على أن f ثنائي الخطية يكفي أن نبين بأن الحد العام $\xi_i \, \eta_j \, c_{ij}$ الوارد في المجموع (13) تابع ثنائي الخطية لِـ x وَ y ولما كان c_{ij} مستقلاً عن x وَ y فمن الواضح أنه يكفي أن يكون $\xi_i \, \eta_j$ ثنائي الخطية ؛ لنرمز بِـ u_i للتوابع الإحداثية لِـX بالنسبة للأساس (a_i) وَ بِـ v_j للتوابع الإحداثية لِـY بالنسبة للأساس (b_j) ، لدينا :

$$\xi_i \, \eta_j = u_i(x) \, v_j(y)$$

وهو ما يثبت (المثال 2) أن هذه العبارة تابع ثنائي الخطية لِـ x وَ لِـ y .

بقي أن نثبت بأن العلاقة (13) أي :

$$f(x, y) = \sum u_i \, (x) v_j(y) c_{ij}$$

تستوجب حتماً المساواة $c_{ij} = f(a_i , b_j)$. بهذا الصدد لدينا :

$$f(a_i , b_j) = \sum_{k,h} u_k(a_i) v_h \, (b_j) c_{kh}$$

ومن جهة أخرى :

$$u_k(a_i) = \begin{cases} 0 & ; k \neq i \\ 1 & ; k = i \end{cases}$$

$$v_h(b_j) = \begin{cases} 0 & ; h \neq j \\ 1 & ; h = j \end{cases}$$

راجع مثلا الفقرة 2، ف 16، أو لاحظ مباشرة أن :

$$a_i = O \cdot a_1 + \ldots + O \cdot a_{i-1} + 1 \cdot a_i + O \cdot a_{i+1} + \ldots + O \cdot a_m$$

إن الحد الوحيد الذي قد يكون غير منعدم في المجموع الذي يعرف $f(a_i, b_j)$ هو إذن الحد الذي من أجله يكون $k = i$ وَ $h = j$، ثم إنه من الواضح أن هذا الحد يساوي c_{ij} وهو المطلوب في النظرية.

نسمي العناصر c_{ij} المنتمية لِـ M **معاملات** f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X وللأساس (b_j) لِـ Y؛ عندما يكون $X = Y$ نأخذ عادة نفس الأساس (a_i) في X وَ Y، وتسمى العناصر $c_{ij} = f(a_i, a_j)$ حينئذ معاملات f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X.

إذا كان $M = K$، نكتب عموماً العلاقة (13) على النحو :

$$f(x, y) = \sum \gamma_{ij} \xi_i \eta_j$$

حيث $\gamma_{ij} = f(a_i, b_j)$

ولما كان :

$$\xi_i \eta_j = u_i \otimes v_j(x, y)$$

فإن العلاقة السابقة تكتب أيضاً، في المقياس $\mathcal{L}(X, Y, K)$ الذي يشمل الأشكال الثنائية الخطية على $X \times Y$، على الشكل :

$$f = \sum \gamma_{ij} \cdot u_i \otimes v_j$$

وبما أن التحليل السابق لِـ f وحيد نستنتج أن الأشكال $u_i \otimes v_j$، البالغ عددها mn، تؤلف أساساً لِـ $\mathcal{L}(X, Y, K)$.

مثال 8 – نعتبر الشكل الثنائي الخطية $(x|y)$ الوارد في المثال 3. وليكن a_1, a_2, a_3 أساساً لـ E، لدينا إذن:

$$(x|y) = \sum (a_i \mid a_j) \cdot \xi_i \eta_j$$

نلاحظ أن هذا الدستور يصبح مختصراً إذا ما كان الأساس a_1, a_2, a_3 **متعامداً ومتجانساً** أي مكوّناً من أشعة طولها 1 ومتعامدة مثنى مثنى، بعبارة أخرى نجد العلاقة التالية عندما نجري الحسابات ضمن **الإحداثيات القائمة**:

$$(a_i \mid a_j) = \begin{cases} 0 \;;\; i \neq j \\ 1 \;;\; i = j \end{cases}$$

وهذا واضح ومنه نستنتج:

$$(x \mid y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$$

يسمح الدستور الأخير بحساب الجداء السلمي لشعاعين ضمن الإحداثيات القائمة.

كما يسمح الدستور نفسه بحساب المسافة التي تفصل نقطتين P وَ Q من الفضاء وهذا دائماً ضمن الإحداثيات القائمة. فهذه المسافة تساوي طول الشعاع:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

لنرمز بـ (x, y, z) لإحداثيات النقطة P وبـ (x', y', z') لإحداثيات Q؛ عندئذ تكون مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ (أو بعبارة أدق، مركبات الشعاع الذي نقطة بدئه 0 والمساير لـ $\overrightarrow{PQ}$) هي $x' - x$، $y' - y$، $z' - z$؛ أما طول هذا الشعاع أي الجذر التربيعي لجدائه السلمي مضروب في نفسه، فهو:

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

إنها العبارة التي نبحث عليها والتي تمثل المسافة التي تفصل النقطتين P وَ Q؛ ضمن الإحداثيات القائمة.

مثال 9 – نستبدل في المثال السابق الجداء السلمي $(x|y)$ بالجداء الشعاعي $x \wedge y$ الوارد في المثال 4. لدينا في هذه الحالة:

$$x \wedge y = \sum \xi_i \, \eta_j \; a_i \wedge a_j$$

كما أن لدينا العلاقتين التاليتين، مهما كان الأساس الذي يقع عليه اختيارنا:

$$a_i \wedge a_i = 0 \quad ; \quad a_i \wedge a_j = - a_j \wedge a_i$$

إذن يَبقى لدينا الدستور:

$$x \wedge y = (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) a_2 \wedge a_3 + (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3) a_3 \wedge a_1 + $$
$$+ (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) a_1 \wedge a_2$$

إذا اخترنا أساساً متعامداً ومتجانساً نحصل على:

$$a_2 \wedge a_3 = a_1 \quad ; \quad a_3 \wedge a_1 = a_2 \quad ; \quad a_1 \wedge a_2 = a_3$$

ويبقى الدستور التالي الصالح ضمن الإحداثيات القائمة:

$$x \wedge y = (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) a_1 + (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3) a_2 + (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) a_3$$

إن هذه الدساتير والتي سبقتها في المثال 8 لدساتير أساسية في التطبيقات العملية (في الهندسة التحليلية ذات الأبعاد الثلاثة وفي الميكانيك والفيزياء الخ...) وهي تعتمد كليةً على الخطية الثنائية للجداءين السلمي والشعاعي.

لدينا نتيجة مماثلة للنظرية 1 فيما يخص التطبيقات الثلاثية الخطية:

نظرية 2 - لتكن X، Y، Z، M مقاييس على حلقة تبديلية K. نفرض أن X، Y، Z مقاييس حرة ومن صنف منته، ولتكن الأسس التالية لـ X، Y، Z بالترتيب $(a_i)_{1 \le i \le m}$، $(b_j)_{1 \le j \le n}$، $(c_k)_{1 \le k \le p}$. لكي يكون تطبيق f من $X \times Y \times Z$ في M ثلاثي الخطية يجب ويكفي أن توجد عناصر c_{ijk} من M بحيث تتحقق المساواة:

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \\ 1 \le k \le p}} \xi_i \, \eta_j \, \zeta_k \; c_{ijk} \tag{15}$$

مهما كانت الأشعة:

$$x = \sum \xi_i a_i \in X, \quad y = \sum \eta_j b_j \in Y, \quad z = \sum \zeta_k c_k \in Z$$

وإن كان الأمر كذلك فلدينا بالضرورة:

$$c_{ijk} = f(a_i, b_j, c_k) \tag{16}$$

يُبين الدستور (12) أنه إذا كان f ثلاثي الخطية فإن العلاقة (15) محققة حتماً بالعناصر c_{ijk} المعطاة بِـ(16). وإذا نظرنا للقضية العكسية وفرضنا أن f معطى بالعلاقة (15) وجدنا أن البرهان على أن f ثلاثي الخطية يأتي من البرهان على أن التابع $\xi_i \eta_j \zeta_k c_{ijk}$ ثلاثي الخطية، لكن لما كان c_{ijk} مستقلاً عن x، y، z فيكفي أن نبين بأن التابع $\xi_i \eta_j \zeta_k$ ثلاثي الخطية؛ ومن أجل ذلك ندخل التوابع الإحداثية u_i، v_j، w_k للمقاييس X، Y، Z بالنسبة للأسس المعتبرة؛ من الواضح أن:

$$\xi_i \eta_j \zeta_k = u_i(x) v_j(y) w_k(z)$$

عبارة تمثل شكلاً ثلاثي الخطية على $X \times Y \times Z$، وهو الشكل:

$$u_i \otimes v_j \otimes w_k$$

لإنهاء البرهان علينا أن نثبت بأن (15) تستلزم (16)؛ بهذا الخصوص نلاحظ أن المساواة التالية ناتجة عن (15):

$$f(a_i, b_j, c_k) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} u_\lambda(a_i) v_\mu(b_j) w_\nu(c_k) c_{\lambda\mu\nu}$$

إن الحد الوحيد الذي قد يكون غير منعدم من بين حدود الطرف الأيسر هو الموافق لِـ $\lambda = i$، $\mu = j$، $\nu = k$، ومنه يأتي $u_\lambda(a_i) = v_\mu(b_j) = w_\nu(c_k) = 1$ وبذلك نصل إلى (16).

تسمى العناصر c_{ijk} من M **معاملات** f بالنسبة للأسس (a_i)، (b_j)، (c_k) لِـ X، Y، Z؛ إذا كان $X = Y = Z$ نستعمل عموماً نفس الأساس (a_i) في X وَ Y وَ Z، ونقول عندها إن العناصر $c_{ijk} = f(a_i, a_j, a_k)$ معاملات f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X.

إذا كان $M = K$ نكتب عادة (15) على النحو:

$$f(x, y, z) = \sum \gamma_{ijk} \xi_i \eta_j \zeta_k$$

حيث :

$$\gamma_{ijk} = f(a_i, b_j, c_k)$$

لدينا حينئذ :

$$f = \sum \gamma_{ijk} u_i \otimes v_j \otimes w_k$$

في المقياس $\mathcal{L}(X, Y, Z; K)$ الذي يضم الأشكال الثلاثية الخطية على $X \times Y \times Z$ ؛ ولما كان التحليل السابق لِـ f وحيداً فإن الأشكال $u_i \otimes v_j \otimes w_k$ البالغ عددها mnp ، تؤلف أساساً للمقياس $\mathcal{L}(X, Y, Z; K)$.

مثال 10 – نعتبر الجداء المختلط $(x|y|z)$ الوارد في المثال 5؛ لدينا :

$$(x|y|z) = \sum (a_i|a_j|a_k)\xi_i \eta_j \zeta_k$$

لكن $(a_i|a_j|a_k) = 0$ عندما تكون i, j, k غير مختلفة مثنى مثنى ، زيادة على ذلك :

$$(a_1|a_2|a_3) = (a_2|a_3|a_1) = (a_3|a_1|a_2) = -(a_1|a_3|a_2) = (a_2|a_1|a_3)$$
$$= -(a_3|a_2|a_1)$$

ولذا يبقى :

$$(x|y|z) = (a_1|a_2|a_3) \cdot (\xi_1 \eta_2 \zeta_3 + \xi_2 \eta_3 \zeta_1 + \xi_3 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_3 \zeta_2 - $$
$$- \xi_2 \eta_1 \zeta_3 - \xi_3 \eta_2 \zeta_1)$$

إذا كان الأساس a_1, a_2, a_3 متعامداً ومتجانساً ، يبقى :

$$(x|y|z) = \xi_1 \eta_2 \zeta_3 + \xi_2 \eta_3 \zeta_1 + \xi_3 \eta_1 \zeta_2 - \xi_1 \eta_3 \xi_2 - \xi_2 \eta_1 \zeta_3 - \xi_3 \eta_2 \zeta_1$$

نرمز عادة للطرف الأيسر من هذه العلاقة باختصار كما يلي :

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

سنعود إلى مثل هذه العبارات في الفصول القادمة.

مثال 11 - لتكن T وترة متعايرة مرتين ومتغيرة عكسياً مرة واحدة على مقياس X، أي أن T شكل ثلاثي الخطية على:

$$X^* \times X^* \times X$$

نفرض أن لِـ X أساساً $(a_1, ..., a_n)$ ولنرمز[*] بِـ$(a^1, ..., a^n)$ للأساس الثنوي في المقياس X^* (الفقرة 2، ف 16) - بعبارة أخرى، تمثل الأشكال الخطية a^i التوابع الإحداثية للمقياس X بالنسبة للأساس (a_i) المعتبر. لحساب $T(u, v, x)$ من أجل u و v في X^* وَ x في X نضع:

$$\alpha_i = u(a_i) \quad \text{ومنه} \quad u = \sum \alpha_i \, a^i$$
$$\beta_i = v(a_i) \quad \text{ومنه} \quad v = \sum \beta_i \, a^i$$
$$x = \sum \xi^i \cdot a_i$$

حينئذ يأتي:

$$T(u, v, x) = \sum T_k^{ij} \, \alpha_i \beta_j \, \xi^k$$

حيث $T_k^{ij} = T(a^i, a^j, a_k)$ ثوابت تدعى معاملات (أو **مركبات** أو **إحداثيات**) الوترة T بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X.

في الختام علينا أن نعمم النظريتين 1 وَ 2 ليشملا التطبيقات p الخطية حيث p كيفي:

نظرية 3 - لتكن $X_1, ..., X_p, M$ مقاييس على حلقة تبديلية K. نفرض أن $X_1, ..., X_p$ حرة ومن صنف منته؛ من أجل كل دليل h بحيث $1 \leq h \leq p$ نعتبر أساساً $(a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn})$ لِـ X_h.

(*) إن الدليلات العليا التي سترد في الدساتير الموالية لا تعني بطبيعة الحال رفعاً إلى قوى. لقد جرت العادة في الحساب الموتري أن نرمز لمركبات الأشعة بدليلات عليا وللأشكال الخطية بدليلات سفلى، هذا ونحتفظ بإصطلاحات مماثلة بالنسبة لمركبات الوترات بحيث يكفينا النظر إلى موضع الدليلات لندرك في الحين نوع الوترة المعتبرة.

لكي يكون تطبيق f من $X_p \times ... \times X_1$ في M متعدد الخطية يجب ويكفي أن توجد ثوابت :

$$c_{i_1 ... i_p} \in M \quad (1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_p \leq n_p)$$

بحيث :

$$f(x_1, ..., x_p) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n_1 \\ ...... \\ 1 \leq i_p \leq n_p}} \xi_{1 i_1} ... \xi_{p i_p} \quad c_{i_1 ... i_p} \tag{17}$$

مهما كانت الأشعة :

$$x_h = \sum_{1 \leq i_h \leq n_h} \xi_{h i_h} \, a_{h i_h} \in X_h \qquad (1 \geq h \leq p)$$

وإن كان الأمر كذلك فلدينا حتماً :

$$c_{i_1} ..., i_p = f(a_{1 i_1}, ..., a_{p i_p}) \tag{18}$$

تأتي العلاقة (17) من العلاقة (10) الواردة في الفقرة 3 هذا عندما يَكون f متعدد الخطية . لإثبات القضية العكسية القائلة بأن (17) تمثل دوماً تطبيقاً متعدد الخطية ، يكفي أن نبين بأن التابع :

$$u_{i_1 ... i_p}(x_1, ..., x_p) = \xi_{1 i_1} ... \xi_{p i_p}$$

p الخطية دوماً ؛ لنرمز بِـ $u_{h_1}, u_{h_2}, ..., u_{h n_h}$ للتوابع الإحداثية للمقياس X_h بالنسبة للأساس $a_{h_1}, ..., a_{h n_h}$ ؛ من الواضح أن هذه التوابع تحقق :

$$u_{i_1 ... i_p}(x_1, ..., x_p) = u_{1 i_1}(x_1) ... u_{p i_p}(x_p)$$

وهو ما يبين أن التابع

$$u_{i_1 ... i_p} = u_{1 i_1} \otimes ... \otimes u_{p i_p}$$

متعدد الخطية فعلاً (المثال 2) . أخيراً نترك للقارئ مهمة البرهان على أن (17) تستوجب (18) وذلك بأن يتبع خطوات برهاني النظريتين 1 وَ 2 .

تسمى العناصر $c_{i_1 \dots i_p}$ من M **معاملات** f بالنسبة للأسس المعتبرة في $X_1, \dots, X_p$ ؛ إن كان $X_1 = \dots = X_p = X$ نستخدم عادة نفس الأساس (a_i) في $X_1, \dots, X_p$ ؛ وعندها لا يطرأ تغيير على الدستور (17) بينما تصبح كتابة (18) على النحو :

$$c_{i_1 \dots i_p} = f(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \qquad \text{(18 مكرر)}$$

تسمى عناصر M عندئذ معاملات f بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X .

مثال 12 – لتكن T وترة من النوع $\binom{p}{q}$ على مقياس X حر ومن صنف منته ؛ نختار أساساً (a_i) لِـ X ، أما في المقياس الثنوي X^* فنعتبر الأساس الثنوي (a^i) ؛ لحساب $T(u_1, \dots, u_p, x_1, \dots, x_q)$ من أجل أشعة x_j في X وأشكال خطية (أو «الشعاع المواكب») u_i في X^* ، نضع :

$$u_h = \sum_{i_h} \alpha_{hi_h} \cdot a^{i_h}$$

ومنه $\alpha_{hi_h} = u_h(a_{i_h})$ وكذلك :

$$x_k = \sum_{j_k} \xi_k^{j_k} \cdot a_{j_k}$$

لدينا إذن :

$$T(u_1, \dots, u_p, x_1, \dots, x_q) = \sum T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \; \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{pi_p} \, \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}$$

حيث : $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(a^{i_1}, \dots, a^{i_p}, a_{j_1}, \dots, a_{j_q})$ ثوابت تدعى **معاملات** (أو **مركبات** أو **إحداثيات**) الوترة T بالنسبة للأساس (a_i) لِـ X .

نفرض مثلاً أن $p = 2$ وَ $q = 3$ ؛ فنستنتج :

$$T(u, v, x, y, z) = \sum T_{khl}^{ij} \; \alpha_i \, \beta_j \, \xi^k \, \eta^h \, \zeta^l$$

من أجل :

$$u = \sum \alpha_i \, a^i, \quad v = \sum \beta_i \, a^i, \quad x = \sum \xi^i \, a_i, \quad y = \sum \eta^i \, a_i, \quad z = \sum \zeta^i \, a_i$$

أما المركبات T^{ij}_{khl} لِـ T فهي معطاة بِـ :

$$T^{ij}_{khl} = T(a^i, a^j, a_k, a_h, a_l)$$

نلاحظ أننا نستطيع حساب مركبات جداء موتري (المثال 7) بكل سهولة. فمثلاً إذا كانت U وترة من النوع $\binom{2}{1}$ وَ V وترة من النوع $\binom{1}{1}$، فإن $T = U \otimes V$ هي الوترة من النوع $\binom{3}{2}$ المعطاة بالعلاقة :

$$T(u, v, w, x, y) = U(u, v, x)\ V(w, y)$$

وبالتالي يأتي أن المركبات :

$$T^{ijk}_{hl} = T(a^i, a^j, a^k, a_h, a_l)$$

لِـ T معطاة بالعلاقة :

$$T^{ijk}_{hl} = U^{ij}_h \cdot V^k_l$$

هذا ونحصل على دساتير مماثلة للسابقة في الحالة العامة.

على القارئ المبتدئ ألّا يترك نفسه تندهش ونتأثر بهذه الدساتير وبِـ «فيض الدليلات»؛ وليعلم أن نتائج هذا الفصل ليست سوى متطابقات جبرية لا تزيد ولا تقل عمقاً عن الدستور :

$$x(y + z) = xy + xz$$

ولذا فإن كل هذه الدساتير تافهة أساساً، رغم مظهرها المهيب، والواقع أن الصعوبة الوحيدة هي حسن إختيار الرموز الملائمة ولا تمثل أبداً في العثور على براهين مبنية على مهارة خارقة.

5. تأثير تغيير الأساس على مركبات الوترات.

ليكن X مقياساً حراً ومن صنف منته على K، نعتبر أساسين :

$$(a_i)_{1 \leq i \leq n} \quad , \quad (b_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq n}$$

لِـ X ؛ سنستعمل الدليلات اللاتينية في كل ما يتعلق بالأساس الأول، ونخص كل ما يتعلق بالأساس الثاني بالدليلات الإغريقية.

لتكن T وترة على X ، نهدف الآن إلى حساب مركبات T بالنسبة للأساس (b_λ) بدلالة مركباته بالنسبة للأساس (a_i).

من أجل ذلك نضع:

$$b_\lambda = \sum_i \theta_\lambda^i \cdot a_i \quad , \quad a_i = \sum_\lambda \varrho_i^\lambda \cdot b_\lambda$$

بحيث تصبح مصفوفتا الإنتقال (θ_λ^i) وَ (ϱ_i^λ) الواحدة مقلوبة الأخرى (الفقرة 4 ، ف 15) . سنحتاج إلى دساتير تجعلنا ننتقل من الأساس الثنوي (a^i) لِـ X^* إلى الأساس الثنوي (b^λ). نلاحظ أن لدينا العلاقة الموالية مهما كان f في X^* .

$$f = \sum f(a_i) \cdot a^i \;=\; \sum f(b_\lambda) \cdot b^\lambda$$

وذلك بفضل الفقرة 2، ف 16 . إذن :

$$b^\lambda = \sum_i \; b^\lambda(a_i) \cdot a^i$$

لكن :

$$b^\lambda(a_i) = b^\lambda\left(\sum_\mu \varrho_i^\mu \cdot b_\mu\right) = \sum_\mu \varrho_i^\mu \cdot b^\lambda(b_\mu)$$

وبما أن :

$$b^\lambda(b_\mu) = \begin{cases} 0 \; ; \; \lambda \neq \mu \\ 1 \; ; \; \lambda = \mu \end{cases}$$

حسب تعريف أساس ثنوي، فإنه يبقى لدينا :

$$b^\lambda(a_i) = \varrho_i^\lambda$$

وعليه يأتي :

$$b^\lambda = \sum_i \varrho_i^\lambda \cdot a^i$$

كما أن :

$$a^i = \sum_{\lambda} \theta_{\lambda}^{i} \cdot b^{\lambda}$$

بعد هذا نعتبر مثلاً وترة T من النوع $\binom{3}{2}$؛ إن مركباته بالنسبة للأساس الأول هي الأعداد السلمية:

$$T_{hl}^{ijk} = T(a^i , a^j , a^k , a_h , a_l)$$

أما مركباته بالنسبة للأساس الثاني فهي الأعداد السلمية:

$$T_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu} = T(b^{\lambda}, b^{\mu}, b^{\nu}, b_{\alpha}, b_{\beta})$$

لكننا رأينا بأن:

$$T(u, v, w, x, y) = \sum T_{hl}^{ijk} \alpha_i \beta_j \gamma_k \xi^h \eta^l$$

من أجل: $u = \sum \alpha_i a^i ,w = \sum \beta_i a^i , w = \sum \gamma_i a^i$

$$x = \sum \xi^i a_i , \ y = \sum \eta^i a_i$$

لنعوض u, v, w, x, y بـ $b^{\lambda}, b^{\mu}, b^{\nu}, b_{\alpha}, b_{\beta}$، عندئذ يأتي:

$$T_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu} = \sum_{i,j,k,h,l} \varrho_i^{\lambda} \ \varrho_j^{\mu} \ \varrho_k^{\nu} \ \theta_{\alpha}^{h} \ \theta_{\beta}^{i} \ T_{hl}^{ijk} \qquad (19)$$

وهي العلاقة المطلوبة. يمكن الحصول على دساتير مماثلة بالنسبة للأنواع الأخرى من الوترات.

ملاحظة 3 - يستخدم الدستور (19) في أغلب الأحوال كتعريف للوترات، بل ظل الدستور (19) يلعب هذا الدور دون غيره إلى تاريخ غير بعيد. والخطوات المتبعة في هذه الحالة هي كالتالي: نعرّف وترة متغايرة ثلاث مرات ومتغيرة عكسياً مرتين على أنها «كائن هندسي» طبيعته «الملموسة» غير محددة لكن نتفق على أنه يقبل، بالنسبة لكل أساس (a_i) لـ X، «مركباتاً» T_{hl}^{ijk}، ثم إن هذه المركبات تتغير مع الأساس المختار طبقاً للدستور (19). لكي نبين أن هذا التعريف يكافئ التعريف المعطى في النص، يجب أن نثبت بأنه إذا ألحقنا كل أساس (a_i) لـ X بأعداد سلمية:

$$T_{hl}^{ijk}$$

بحيث تكون العلاقات (19) محققة مهما كان الأساسان (a_i) وَ (b_λ) لِـ X ، فإنه توجد وترة وحيدة من النوع $\binom{3}{2}$ على X تقبل الأعداد السلمية T_{hl}^{ijk} الملحقة بالأساس (a_i) كمركبات لها بالنسبة للأساس (a_i) نفسه. لرؤية ذلك نختار أساساً (a_i) ونحتفظ به حتى نهاية البرهان، ثم ننشئ الوترة التالية بواسطة هذا الأساس:

$$T(u, v, w, x, y) = \sum T_{hl}^{ijk} \alpha_i \beta \gamma_k \xi^h \eta^l$$

تقتصر مهمتنا الآن على البرهان بأن مركبات هذه الوترة بالنسبة لأي أساس آخر (b_λ) لِـ X ، هي الأعداد السلمية:

$$T_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu}$$

الملحقة بالأساس (b_λ)؛ لكن الحسابات السابقة تبرهن على أن مركبات T بالنسبة للأساس (b_λ) هي الأعداد السلمية:

$$\sum_{i,j,k,h,l} \varrho_i^\lambda \ \varrho_j^\mu \ \varrho_k^\nu \ \theta_\alpha^h \ \theta_\beta^l \ T_{hl}^{ijk}$$

وبما أن هذه العبارات تساوي بالضبط العناصر $T_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu}$ الملحقة بالأساس (b_λ)؛ وذلك حسب الفرض، فإن البرهان قد انتهى.

بإمكاننا أيضاً النظر إلى هذا البرهان بالكيفية التالية: تعبر الدساتير (19) على أنه، بعد تعاطي شعاعين x وَ y في X والأشكال الخطية u وَ v وَ w في X^* ، تصبح العبارة:

$$\sum T_{hl}^{ijk} \alpha_i \ \beta_j \gamma_k \xi^h \eta^l$$

المحسوبة بواسطة إحداثيات x، y، u، v، w بالنسبة لهذا الأساس، مستقلة عن جملة الإحداثيات المختارة من أجل تعريف العبارة نفسها. ولمزيد من الإيضاح نلاحظ أن خاصية الدساتير المماثلة لِـ(19) المتمثلة في كونها تسمح بتعريف كائنات لها مدلول مستقل عن جمل الإحداثيات المستخدمة لإنشائها (أي الكائنات)، هي السبب في دخول نظرية الوترات إلى ميداني

الفيزياء والرياضيات. إن الفكرة الأساسية من وراء كل هذا هي أن جمل الإحداثيات ليست سوى أداة تستخدم لدراسة كائنات لها مدلول ذاتي، ولأن الشيء الذي يهمنا هو هذه الكائنات وحدها دون سواها.

ف 22. التطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة

1. التطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة.

ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K. نقول عن تطبيق ثنائي الخطية:

$$f: X \times X \to M$$

إنه **متناوب** فيما إذا كان:

$$f(x, x) = 0; \quad \forall x \in X \tag{1}$$

ومنه نستنتج العلاقة التالية مهما كان x وَ y في X:

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$$
$$= f(x, y) + f(y, x)$$

وبالتالي نجد أن كل تطبيق ثنائي الخطية متناوب يحقق حتماً المتطابقة:

$$f(y, x) = -f(x, y); \quad \forall x, y \in X \tag{2}$$

ملاحظة 1 – من الواضح أن القضية العكسية صحيحة أي أن (2) تستلزم:

$$2 \cdot f(x, x) = 0; \quad \forall x \in X$$

إذا كانت العلاقة $2m = 0$، من أجل m في M، تستلزم $m = 0$ (وهو ما يحدث عندما يكون K مثلاً حقلاً «مميزته» لا تساوي 2، لأن 2 يقبل القلب في K عندئذ: أنظر الفقرة 6، ف 30) فإننا نرى بأن العلاقة (2) تميز التطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة. أما إذا فرضنا مثلاً أن $M = K$ هو

حلقة صفوف الأعداد الصحيحة وفق 2، فإن العلاقة (2) التي تكتب عندئذ على النحو $f(x, y) = f(x, y)$ لا تكفي ليكون f متناوباً. لكن الحالة الأخيرة قل ما نجدها في الميدان العملي.

من الواضح أن كل عبارة خطية من التطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة، هي أيضاً تطبيق ثنائي الخطية متناوب، أي أن التطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة تشكل مقياساً جزئياً من المقياس $\mathcal{L}(X, X; M)$ المؤلف من التطبيقات الثنائية الخطية من $X \times X$ في M.

مثال 1 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ وَ X الفضاء المعتاد المعرف بثلاثة أبعاد؛ عندئذ يكون التطبيق f من $X \times X$ في X المعطى بِـ:

$$f(x, y) = x \wedge y$$

(وهو الجداء الشعاعي الوارد في المثال 4، ف 21) ثنائي الخطية متناوب.

مثال 2 - إذا كان f تطبيقاً ثنائي الخطية من $X \times X$ في M، فإن التطبيق g المعطى بِـ:

$$g(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$$

ثنائي الخطية متناوب. بصفة خاصة، إذا كان u وَ v شكلين خطيين على X، فإن التطبيق:

$$g(x, y) = u(x)\ v(y) - u(y)\ v(x)$$

من $X \times X$ في K شكل ثنائي الخطية متناوب على $X \times X$؛ يسمى هذا التطبيق الجداء الخارجي للشكلين الخطيين u وَ v، ونرمز له بِـ:

$$u \wedge v$$

لنأخذ مثلاً $K = \mathbf{R}$ و X كما هو معرف في المثال السابق ونضع:

$$u(x) = (a \mid x)\ ;\ v(x) = (b \mid x)$$

حيث يمثل a وَ b شعاعين ثابتين. لدينا في هذه الحالة الدستور التالي، لما $g = u \wedge v$:

$$g(x, y) = (a \wedge b \,|x|\, y)$$

وهذا يعني أن لدينا المتطابقة :

$$(a \mid x)(b \mid y) - (a \mid y)(b \mid x) = (a \wedge b \,|x|\, y) = (a \,|b|\, x \wedge y)$$

نترك للقارئ مهمة إثبات هذه النتيجة سواء بالطريقة الهندسية المباشرة أو بواسطة الحساب ضمن إحداثيات قائمة (يمكن أيضاً إجراء الحساب في جملة إحداثيات كيفية) .

2. حالة المقاييس الحرة ذات الصنف المنتهي.

لدينا بالنسبة للتطبيقات الثنائية الخطية المتناوبة نتيجة مماثلة للنظرية 1 من ف . 21 :

نظرية 1 – ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K ، نفرض أن X حرّ ومن صنف منته . نرمز بِـ $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ لأساس لِـ X . حتى يكون تطبيق ثنائي الخطية f من $X \times X$ في M متناوباً ، يجب ويكفي أن تحقق معاملاته :

$$c_{ij} = f(a_i, a_j)$$

بالنسبة للأساس (a_i) ، العلاقات :

$$c_{ii} = 0; \; c_{ij} + c_{ji} = 0 \tag{3}$$

وعندئذٍ نجد أن :

$$f(x, y) = \sum_{i<j} c_{ij} \; (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) \tag{4}$$

مهما كان الشعاعان :

$$x = \sum_i \xi_i \, a_i = \sum_i \eta_i \, a_i$$

إذا ما وضعنا $x = a_i$ في (1) وَ $x = a_i$ وَ $y = a_j$ في (2) نتجنب

العلاقات (3). للنظر في القضية العكسية نفرض أن (3) محققة فيتبين أن الدستور:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij}$$

الناتج عن النظرية 1 من ف 21، له حدود منعدمة وهي تلك التي توافق $i = j$؛ وتجميع الحدود الأخرى حسب المقادير النسبية لِـ i و j نجد أن:

$$f(x, y) = \sum_{i<j} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij} + \sum_{i>j} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij}$$

لنستبدل i بِـ j وَ j بِـ i في الطرف الثاني من العلاقة السابقة، (لم نقم إذن سوى بتغيير الرموز) نحصل عندئذ على:

$$f(x, y) = \sum_{i<j} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij} + \sum_{i<j} \xi_j \, \eta_i \, c_{ji} = \sum_{i<j} \xi_i \, \eta_j \, c_{ij} - \sum_{i<j} \xi_j \, \eta_i \, c_{ij}$$

وذلك حسب (3)؛ نحصل في النهاية على العلاقة (4)، وهي تثبت أن f متناوب لأن الفرق $\xi_i \, \eta_j - \xi_j \, \eta_i$ ينعدم في حالة $x = y$ وهذا أمر واضح؛ وبذلك ينتهي البرهان.

ملاحظة 2 - نرمز بِـ u_i للتوابع الإحداثية لِـ X بالنسبة للأساس (a_i)، فنرى حسب المثال 2 أن:

$$\xi_i \, \eta_j - \xi_j \, \eta_i = u_i(x) \, u_j(y) - u_j(x) \, u_i(y) = u_i \wedge u_j(x, y)$$

وبالتالي نستطيع كتابة (4) على الشكل:

$$f(x, y) = \sum_{i<j} u_{ij}(x, y) \, c_{ij}$$

حيث وضعنا $u_{ij} = u_i \wedge u_j$، نلاحظ من جهة أخرى أن هذا التحليل لِـ f وحيد لأن منه نستنتج $c_{ij} = f(a_i, a_j)$.

إذا كان $M = K$ فالدستور السابق يكتب على النحو:

$$f = \sum_{i<j} \gamma_{ij} \ u_{ij}$$

حيث $\gamma_{ij} = f(a_i , a_j)$ ؛ من ذلك نستنتج بأن الأشكال الثنائية الخطية المتناوبة $u_{ij} = u_i \wedge u_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ البالغ عددها $n(n-1)/2$ ، تشكل أساساً لمقياس الأشكال الثنائية الخطية المتناوبة على $X \times X$.

باستعمال الرمز :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

الذي أدخل في الفقرة 3 ، ف 15 ، نرى أنه إذا كان f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على X فإن :

$$f(x, y) = \sum \gamma_{ij} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix} \tag{5}$$

حيث $\gamma_{ij} = f(a_i , a_j)$.

إذا كان $n = 1$ ، يتضح أن f منعدم عند كل نقطة لأن :

$$f(x, y) = f(\xi_1 \ a_1, \eta \ a_1) = \xi_1 \ \eta_1 \ f(a_1 , a_1) = 0$$

إذا كان $n = 2$ ، يصبح الدستور (5) كما يلي :

$$f(x, y) = \gamma_{12} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

حيث $\gamma_{12} = f(a_1 , a_2)$.

يسمى التابع :

$$\boldsymbol{D}(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \xi_1 \ \eta_2 - \xi_2 \ \eta_1$$

معين الشعاعين x و y بالنسبة للأساس (a_1 , a_2) لـ X ، وهو شكل ثنائي الخطية متناوب على X بحيث :

$$D(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

إن هذه الخاصية تميز D لأن (6) يكتب على النحو :

$$f = f(a_1, a_2) \cdot D$$

ويستلزم $f = D$ لما $f(a_1, a_2) = 1$.

إذا كان $n = 3$ ، تكتب العلاقة (5) على الشكل :

$$f(x, y) = \gamma_{23} \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} + \gamma_{31} \begin{vmatrix} \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_1 & \eta_1 \end{vmatrix} + \gamma_{12} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

وعندئذ نجد أن الأشكال الثنائية الخطية المتناوبة على $X \times X$ تتعلق بثلاثة ثوابت كيفية :

$$\gamma_{23} = f(a_2, a_3); \ \gamma_{31} = f(a_3, a_1), \gamma_{12} = f(a_1, a_2)$$

ملاحظة 3 - إذا كان $K = \mathbf{R}$ ، ورمزنا بـ X للفضاء المعتاد المعرف بأبعاده الثلاثة ، وفرضنا أن $(a_i)_{1 \le i \le 3}$ أساس متعامد ومتجانس لـ X ؛ واعتبرنا الشعاع :

$$u = \gamma_{23} \, a_1 + \gamma_{31} \, a_2 + \gamma_{12} \, a_3 \tag{8}$$

وجدنا أن العلاقة (7) تعني بأن $f(x, y)$ يُساوي الجداء السلمي لـ u للشعاع $x \wedge y$ ، أي أن (راجع المثال 10 ف 21) :

$$f(x, y) = (u \,|x|\, y)$$

وإذا نظرنا للقضية العكسية أتضح لدينا بأن كل تابع f معطى بدستور من هذا النوع ، هو أيضاً شكل ثنائي الخطية متناوب .

وهكذا يمكن أن نطابق f بالشعاع u ، وهذا ما يبين لنا لماذا لا تدخل الأشكال الثنائية الخطية المتناوبة عموماً في الهندسة الأولية وفي الفيزياء . بهذا الخصوص علينا أن نلاحظ أن مطابقة f بالشعاع (8) لا تكون لها معنى إلاّ ضمن الإحداثيات القائمة (كما نلاحظ أن مفهوم الإحداثيات القائمة يقتضي

إختيار وحدة طول) ؛ بعبارة أدق، فإن الشعاع (8) مستقل عن الأساس (a_i) طالما إنتقلنا من أساس متعامد ومتجانس إلى أساس يمتع بنفس الخاصية ؛ أما إذا رخصنا لِـ(a_i) أن يتغير في مجموعة كل أسس X، فإن الشعاع (8) لا يرتبط بِـf فحسب بل يرتبط أيضاً بالأساس (a_i) المعتبر. ويرجع سبب ذلك إلى كوْن دساتير تغيير الإحداثيات بالنسبة لوترة من النوع $\binom{0}{2}$، ليست نفس الدساتير الصالحة بالنسبة لشعاع أي بالنسبة لوترة من النوع $\binom{1}{0}$.

3. التطبيقات الثلاثية الخطية المتناوبة.

ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K ؛ نقول عن تطبيق ثلاثي الخطية :

$$f: X \times X \times X \rightarrow M$$

إنه متناوب، عندما تنعدم العبارة $f(x, y, z)$ كلما تساوى شعاعان من بين الأشعة x، y، z، أي لما :

$$f(x, y, y) = f(x, y, x) = f(x, x, z) = 0 \quad (8)$$

مهما كانت الأشعة x، y، z. وبالتالي فإن التوابع الثنائية الخطية $f(a, y, z)$، $f(x, a, z)$، $f(x, y, a)$ متناوبة، مهما كان a في X ؛ ومنه تأتي العلاقات :

$$f(x, y, z) = -f(x, z, y), \;\; f(x, y, z) = -f(z, y, x)$$

$$f(x, y, z) = -f(y, x, z)$$

التي تكافئ العلاقات الموالية بداهة :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) &= -f(x, z, y) \\ &= -f(y, x, z) = -f(z, y, x) \end{aligned} \quad (9)$$

إذا استلزمت العلاقة $2m = 0$، من أجل m في M، المساواة $m = 0$، فإن العلاقات (9) تستلزم العلاقات (8) وتميز إذن التوابع الثلاثية الخطية المتناوبة.

مثال 3 - إذا أخذنا $K = \mathbf{R}$ ورمزنا بـX للفضاء المعتاد ذي الأبعاد الثلاثة ، وجدنا أن الجداء المختلط $(x|y|z)$ شكل ثلاثي الخطية متناوب على X .

مثال 4. نفرض أن X وَ K كيفيان ، نختار تطبيقاً ثلاثي الخطية g ونضع :

$$f(x, y, z) = g(x\, y, z) + g(y, z, x) + g(z, x, y) - \\ - g(x, z, y) - g(y, x, z) - g(z, y, x)$$

عندئذ يَكونُ f تطبيقاً ثلاثي الخطية متناوباً كما يتبين لنا ذلك بسرعة .

بصفة خاصة نعتبر الأشكال الخطية u ، v ، w على X ؛ عندئذ يَكون :

$$f(x, y, z) = u(x)\, v(y)\, w(z) + u(y)\, v(z)\, w(x) + u(z) \cdot v(x) \cdot w(y) - \\ - u(x)\, v(z)\, w(y) - u(y)\, v(x)\, w(z) - u(z)\, v(y)\, w(x)$$

شكلاً ثلاثي الخطية على $X \times X \times X$ ، ويسمى **الجداء الخارجي للأشكال الخطية** u ، v ، w ، ونرمز له بـ:

$$u \wedge v \wedge w$$

لدينا : $u \wedge v \wedge w = 0$ في حالة ما إذا كانت الأشعة u, v, w غير مختلفة مثنى مثنى ؛ كما أن :

$$u \wedge v \wedge w = v \wedge w \wedge u = w \wedge u \wedge v = - u \wedge w \wedge v \\ = - v \wedge u \wedge w = - w \wedge v \wedge u$$

مثال 5 - ليكن u شكلاً خطياً وَ f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على مقياس X ؛ حينئذ يكون التابع :

$$g(x, y, z) = u(x)\, f(y, z) + u(y)\, f(z, x) + u(z)\, f(x, y)$$

شكلاً ثلاثي الخطية متناوباً على $X \times X \times X$ ؛ ويسمى **الجداء الخارجي** للشكل الخطي u والشكل الثنائي الخطية المتناوب f؛ نرمز له بـ:

$$u \wedge f$$

من الواضح أنه إذا كانت u ، v ، w أشكالاً خطية على X ، فإن:

$$u \wedge v \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$$

كما أننا نرمز بـ:

$$f \wedge u$$

للشكل الثلاثي الخطية:

$$f(x, y)\, u(z) + f(y, z)\, u(x) + f(z, x)\, u(y)$$

لدينا:

$$u \wedge f = f \wedge u$$

(بينما كان لدينا $u \wedge v = - v \wedge u$ ، حينما كان u وَ v شكلين خطيين).

4. النشر بالنسبة لأساس.

لدينا النتيجة التالية الخاصة بالتطبيقات الثلاثية الخطية المتناوبة، والمماثلة للنظرية 1:

نظرية 2 – ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية. نفرض أن X حر ومن صنف منته، وليكن $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ أساساً لـX. لكي يكون تطبيق ثلاثي الخطية f من $X \times X \times X$ في M متناوباً، يجب ويكفي أن تحقق المعاملات:

$$c_{ijk} = f(a_i, a_j, a_k)$$

بالنسبة للأساس المعتبر العلاقات:

$$c_{ijj} = c_{iji} = c_{iik} = 0 \tag{10}$$

$$c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = - c_{ikj} = - c_{jik} = - c_{kji} \tag{11}$$

وإذا كان الأمر كذلك فإن:

$$f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix} \tag{12}$$

مهما كانت الأشعة:

$$x = \sum \xi_i\, a_i, \quad y = \sum \eta_i\, a_i, \quad z = \sum \zeta_i\, a_i$$

نستعمل في الدستور (12) الرمز:

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix} = \xi_i \eta_j \zeta_k + \xi_j \eta_k \zeta_i + \xi_k \eta_i \zeta_j - \\ - \xi_i \eta_k \zeta_j - \xi_j \eta_i \zeta_k - \xi_k \eta_i \zeta_i \tag{13}$$

المماثل للمعينات من الرتبة 2 والذي كنا أدخلناه في المثال 10 من ف 21.

للبرهان على النظرية 2، يجب أن نبين أولاً بأن كل تطبيق ثلاثي الخطية متناوب f، يحقق حتماً (10) وَ (11)؛ وهو ما نحصل عليه بالفعل عند نكتب (8) وَ (9) من أجل $x = a_i$ وَ $y = a_j$ وَ $z = a_k$.

نفرض، للبرهان على القضية العكسية، أن العلاقات (10) وَ (11) محققة؛ ثم نلاحظ في الدستور:

$$f(x, y, z) = \sum_{1 \le i,j,k \le n} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k$$

الناتج عن النظرية 2، ف. 21 أن حدوده الوحيدة التي قد تكون غير منعدمة هي تلك التي تختلف فيها الدليلات i, j, k مثنى مثنى. بترتيب الثلاثيات (i, j, k) وفق المقادير النسبية لِـ i, j, k نحصل على تحليل لِـ f ذي ستة مجاميع جزئية وهي:

$$f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \sum_{j<k<i} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \sum_{k<i<j} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k +$$

$$+ \sum_{i<k<j} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \sum_{j<i<k} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \sum_{k<j<i} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k$$

نشير إلى أننا نستطيع تغيير الرموز في كل مجموع من المجاميع الجزئية السابقة بحيث يصبح المجموع المعتبر متعلقاً بالثلاثيات (i, j, k) التي تحقق : $i < j < k$ (فمثلاً يمكن أن نستبدل j بِـ i وَ k بِـ j وَ i بِـ k) وبهذه الطريقة نحصل على :

$$f(x, y, z) = \sum_{i<j<k} c_{ijk}\, \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \sum_{i<j<k} c_{kij}\, \xi_k\, \eta_i\, \zeta_j + \sum_{i<j<k} c_{jki}\, \xi_j\, \eta_k\, \zeta_i +$$

$$+ \sum_{i<j<k} c_{ikj}\, \xi_i\, \eta_k\, \zeta_j + \sum_{i<j<k} c_{jik}\, \xi_j\, \eta_i\, \zeta_k + \sum_{i<j<k} c_{kji}\, \xi_k\, \eta_j\, \zeta_i$$

بمراعاة العلاقات (11) وبتجميع الحدود ذات الدليلات i ، j ، k في المجاميع الستة السابقة ، نجد :

$$f(x, y, z) = \sum c_{ijk}(\xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \xi_j\, \eta_k\, \zeta_i + \xi_k\, \eta_i\, \zeta_j - \xi_i\, \eta_k\, \zeta_j -$$

$$- \xi_j\, \eta_i\, \zeta_k - \xi_k\, \eta_j\, \zeta_i)$$

وهو بالضبط الدستور (12) .

يبقى أن نبين بأن f متناوب ؛ للحصول على ذلك يكفي أن نثب بأن الشكل الثلاثي الخطية :

$$u_{ijk}(x, y, z) = \xi_i\, \eta_j\, \zeta_k + \xi_j\, \eta_k\, \zeta_i + \xi_k\, \eta_i\, \zeta_j - \xi_i\, \eta_k\, \zeta_j - \xi_j\, \eta_i\, \zeta_k - \xi_k\, \eta_j\, \zeta_i$$

متناوب ؛ لنلاحظ بهذا الصدد ، أننا إذا رمزنا بِـ u_i للتابع الإحداثي من الرتبة i للمقياس X بالنسبة للأساس (a_i) ؛ نجد :

$$u_{ijk}(x, y, z) = u_i(x)\, u_j(y)\, u_k(z) + u_i(y)\, u_j(z)\, u_k(x) + u_i(z)\, u_j(x)\, u_k(y)$$

$$- u_i(x)\, u_j(z)\, u_k(y) - u_i(y)\, u_j(x)\, u_k(z) - u_i(z)\, u_j(y)\, u_k(x)$$

أي أن :

$$u_{ijk} = u_i \wedge u_j \wedge u_k$$

وهو ما يثبت (المثال 5) أن العبارة التي تناولناها ، متناوبة . وبذلك يختتم برهان النظرية 2 .

نعتبر مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

معاملاتها في حلقة تبديلية K ، **معين** A هو ، تعريفاً ، العنصر :

$$ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a''$$

المنتمي إلى K ؛ نرمز له بِـ :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

المستعمل في نص النظرية 2 ، ونرمز كذلك بِـ :

$$\text{dét}\,(A)$$

لنلاحظ أن :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \cdot \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \cdot \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

مثال 6 - إذا كان $n \leq 2$ فإن الدليلات i ، j ، k لا يمكن أبداً أن تكون مختلفة مثنى مثنى ؛ ولذا فالمعاملات c_{ijk} منعدمة كلها ، وعليه فإن التطبيق الثلاثي الخطية المتناوب الوحيد في هذه الحالة هو $f = 0$.

مثال 7 - نفرض $n = 3$ ؛ عندئذ يُصبح الدستور (12) كما يلي :

$$f(x, y, z) = c_{123} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

حيث $c_{123} = f(a_1, a_2, a_3)$.

تسمى العبارة :

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

معيّن الأشعة x ، y ، z **بالنسبة للأساس** (a_1, a_2, a_3) - نلاحظ أن قيمة هذا المعين تتعلق بالفعل باختيار الأساس من جهة، ومن جهة أخرى نشير إلى أن التابع $D(x, y, z)$ شكل ثلاثي الخطية على X ، وأن لدينا :

$$D(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

تميز هذه العلاقة الشكل D على كل الأشكال الثلاثية الخطية المتناوبة على X ؛ ذلك أن لدينا :

$$f = f(a_1, a_2, a_2) D$$

حسب النظرية 2، حين يرمز f لذلك الشكل. وبالتالي فإن $f = D$ عندما يكون f مساوياً لِـ 1 على أشعة الأساس.

مثال 8 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونرمز بِـ X للفضاء المعتاد ذي الأبعاد الثلاثة؛ نعتبر الجداء المختلط $(x|y|z)$؛ إنه شكل ثلاثي الخطية متناوب على X ، لدينا إذن :

$$(x|y|z) = (a_1|a_2|a_3) \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

بالنسبة لأي أساس لِـ X . وهكذا نعثر على نتيجة المثال 10 من ف 21 .

تتضمن دراسة الأشكال الثلاثية الخطية المتناوبة والمعينات من الرتبة الثالثة نتائج أخرى كثيرة، لكننا أجلنا تقديمها إلى حين تعميمها كلها على الأشكال p الخطية المتناوبة وعلى المعينات من رتبة كيفية، وهو ما سنتعرض إليه في الفصلين المواليين.

ف 23. التطبيقات المتعددة الخطية المتناوبة

1. اشارات التبديلات.

نذكر (المثال 4، ف 7) أننا نرمز بِـ $\mathcal{G}_p$ لزمرة تبديلات المجموعة $\{1, 2, ..., p\}$ من أجل كل عدد طبيعي p. من بين هذه التبديلات توجد الانقالات (الفقرة 5، ف 7) وهي تقتصر على استبدال عددين طبيعيين متواليين i وَ $i + 1$ الواحد مكان الآخر دون المس بالأعداد الأخرى؛ وقد رأينا في الفقرة 5، ف 7 أن كل تبديل σ من $\mathcal{G}_p$ يكتب حتماً على الشكل:

$$\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r \tag{1}$$

وهو عبارة عن جداء إنقالات؛ من الواضح أن الكتابة (1) ليست وحيدة: فإذا كان τ انقالاً مثلاً نجد أن $\tau \circ \tau = e$ وبالتالي:

$$\tau = \tau \circ \tau \circ \tau = \tau \circ \tau \circ \tau \circ \tau \circ \tau = ...$$

وعلى كل فسنبين في هذه الفقرة بأننا إذا إنتقلنا من التحليل (1) لِـ σ إلى تحليل آخر له، فإن زوجية العدد r لا تتغير - أي إذا كتب σ على شكل جداء لعدد زوجي (فردي بالترتيب) من الإنقالات فإن كل تحليل لِـ σ حسب جداء إنقالات يحتوي حتماً على عدد زوجي (فردي بالترتيب) من العوامل.

لنسلم مؤقتاً بهذه النتيجة. عندئذ نرى أن العدد:

$$(-1)^r$$

في التحليل (1) لا يتعلق إلاّ بِـ σ، ولا يتعلق أبداً بكيفية كتابة σ على

شكل جداء انقالات ؛ وعليه نستطيع أن نعرف على الزمرة $\mathcal{G}_p$ تابعاً $\mathcal{P}$ تكون قيمه مقتصرة على 1 + أو 1 - ويحقق :

$$\mathcal{P}(\sigma) = (-1)^r \tag{2}$$

إذا ما كان σ جداء لعدد r من الإنقالات . من الواضح أن لدينا :

$$\mathcal{P}(\sigma) = -1 \tag{3}$$

عندما يكون σ إنقالاً .

من جهة أخرى ، نلاحظ أنه إذا كتب تبديلان σ' وَ σ'' على شكل جداءين مكونين من إنقالات عددهما r وَ s بالترتيب ، تبين أن $\sigma' \circ \sigma''$ يكتب على شكل جداء لإنقالات عددها $s + r$ ؛ لدينا إذن :

$$\mathcal{P}(\sigma')\,\mathcal{P}(\sigma'') = \mathcal{P}(\sigma' \circ \sigma'') \tag{4}$$

مهما كان التبديلان σ' وَ σ'' .

نشير إلى أن المجموعة $\{-1, +1\}$ تمثل الزمرة الضريبية $\mathbf{Z}^*$ التي ترمز للعناصر القابلة للقلب في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$. (الملاحظة 1 ، ف 8) ؛ يبيّن إذن الدستوران (3) وَ (4) أن التطبيق :

$$\mathcal{P} : \mathcal{G}_p \to Z^* \tag{5}$$

تماثل زمرتين ، يأخذ القيمة 1 - على الإنقالات .

للنظر في القضية العكسية نفرض أننا أنشأنا تماثلاً من هذا النوع ؛ تعطى العلاقة (1) عندئذ :

$$\mathcal{P}(\sigma) = \mathcal{P}(\tau_1) \ldots \mathcal{P}(\tau_r) = (-1) \ldots (-1) = (-1)^r$$

بما أن الطرف الأيسر لهذه العلاقة لا يتعلق إلاّ بِـσ فإننا نستنتج أن زوجية r مستقلة عن التحليل (1) لِـσ على شكل جداء انقالات . وبالتالي نرى أنه لكي نثبت بأن زوجية r لا تتغير في التحليل (1) ، يكفي أن ننشئ تماثلاً من النوع (5) يساوي 1 - على كل انقال . سنتوصل إلى ذلك بفضل المفهوم التالي :

لتكن X مجموعة كيفية و M زمرة جمعية و p عدداً صحيحاً موجباً تماماً ، لنعتبر بعد هذا التطبيق :

$$f : X^p \rightarrow M$$

أي f تابعاً $f(x_1, ..., x_p)$ لِـ p متغير x_i من X ، يأخذ قيمه في M . نقول عن f إنه **ضد تناظري** إذا ما تحققت لدينا العلاقة :

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, ..., x_p) = -f(x_1, ..., x_p) \tag{6}$$

أي إذا كان :

$$f(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(p)}) = -f(x_1, ..., x_p) \tag{7}$$

مهما كان الانقال τ .

لنعتبر تابعاً من هذا النوع ؛ سنبين بأن لدينا في هذه الحالة ، العلاقة :

$$f\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^r \cdot f(x_1, ..., x_p) \tag{8}$$

كلما كتب التبديل σ المنتمي لِـ $\mathfrak{S}_p$ على شكل جداء لِـ r إنقال .

إذا كان $r = 1$ فإننا نقع في تعريف التوابع ضد التناظرية نفسه . نتابع الآن البرهان بالتدريج على r . إذا كان σ جداء لِـ r إنقال ، نستطيع كتابة :

$$\sigma = \tau \circ w$$

حيث يرمز τ لإنقال و w لجداء $r - 1$ إنقالاً ؛ ولذلك نحصل على العلاقة التالية بفضل فرض التدريج :

$$f\left(y_{w(1)}, ..., y_{w(p)}\right) = (-1)^{r-1} f(y_1, ..., y_p) \tag{9}$$

مهما كانت العناصر y_i في X . لنكتب هذه العلاقة في حالة :

$$y_1 = x_{\tau(1)}, ..., y_p = x_{\tau(p)}$$

لدينا إذن : $y_i = x_{\tau(i)}$ وبتعويض i بِـ $w(i)$ نجد :

$$y_{w(i)} = x_{\tau(w(i))} = x_{\sigma(i)}$$

ومنه نستنتج أن (9) تكتب على النحو :

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = (-1)^{r-1} f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}\right)$$

لكن لما كان τ انقالاً فإن الطرف الثاني لهذه العلاقة يساوي الطرف الثاني من (8) حسب (7)، وبذلك نكون قد أثبتنا العلاقة (8).

ستسمح لنا العلاقة (8) بالبرهان على أن زوجية r لا تتعلق إلاّ بـσ. بما أن الطرف الأيسر من (8) لا يتعلق بـσ فإن تعاطي تحليليين لـσ على شكل جداءين من الإنقالات عددها r وَ s على التوالي يؤدي إلى العلاقة :

$$(-1)^r f(x_1, \ldots, x_p) = (-1)^s f(x_1, \ldots, x_p)$$

مهما كان التابع ضد التناظري f؛ لكي نستنتج المساواة: $(-1)^r = (-1)^s$، يكفي أن نضع أنفسنا في حلة يجوز فيها «الاختصار» بـ$f(x_1, \ldots, x_p)$، نكون في مثل هذه الحالة إذا كان f، مثلاً، ذا قيم في $\mathbf{Z}$ وإذا وجدت عناصر $x_1, \ldots, x_p$ في X بحيث $f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$. أي أن علينا الآن إنشاء تابع ضد تناظري لا يتطابق مع الصفر ويأخذ قيمه في $\mathbf{Z}$، ويكون إنشاء هذا التابع على مجموعة X مختارة إختياراً لائقاً.

من أجل ذلك نأخذ $X = \mathbf{Z}$ وَ

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{1 \leq j < j \leq p} (x_i - x_j) \qquad (10)$$

إذا كانت العناصر x_i مختلفة مثنى مثنى فمن الواضح أن $f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$؛ يبقى إذن أن نرى كيف أن f ضد تناظري.

لنستبدل x_k وَ x_{k+1} فيما بينهما من أجل دليل معطى k. إن الحدود $x_i - x_j$ الواردة في الطرف الأيمن من (10) لا تتغير إلا إذا كان $i = k$ أو $i = k + 1$، أو $j = k$ أو $j = k + 1$؛ نلاحظ من ناحية أخرى أن هذه الحدود تظهر كما يلي في تعريف f:

$$(x_k - x_{k+1}) \cdot [(x_k - x_{k+2}) \ldots (x_k - x_p)] \cdot [(x_{k+1} - x_{k+2}) \ldots (x_{k+1} - x_p)] \times$$

$$\times [(x_1 - x_k) \ldots (x_{k-1} - x_k)] \cdot [(x_1 - x_{k+1}) \ldots (x_{k-1} - x_{k+1})]$$

بعد هذا، إذا استبدلنا x_k وَ x_{k+1} فيما بينهما نجد أن العامل الأول يضرب في 1 – ، أما الجداءان الجزئيان الثاني والثالث فيستبدلان فيما بينهما، والحال كذلك بالنسبة للجدائين الجزئيين الرابع والخامس وهكذا نجد أن الجداء الكلي يضرب في 1 – . إذن فالتابع (10) ضد تناظري بالفعل، أخيراً نقارن (2) وَ (8) لنتأكد بأننا أثبتنا النتيجة التالية :

نظرية 1 – من أجل كل $p \geq 1$، يوجد تماثل وحيد :

$$\mathcal{P} : \mathcal{G}_p \to \mathbf{Z}^*$$

يحقق $\mathcal{P}(\sigma) = -1$ مهما كان الإنقال σ. لدينا $\mathcal{P}(\sigma) = (-r)^r$ حينما يكون التبديل σ جداء لِـ r انقال.

زيادة على ذلك، إذا أعتبرنا مجموعة X وزمرة جمعية M وتطبيقاً ضد تناظري :

$$f : X^p \to M$$

نحصل على :

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \mathcal{P}(\sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_p)$$

مهما كانت العناصر x_i في X، والتبديل σ في $\mathcal{G}_p$.

يسمى العدد $\mathcal{P}(\sigma)$ **إشارة التبديل** σ، كما يستعمل أيضاً لفظ **زوجية** بدل أشارة والرمز ε_σ بدل $\mathcal{P}(\sigma)$.

نقول عن تبديل إنه **زوجي** إذا كانت إشارته تساوي 1 + وإنه **فردي** إذا كانت اشارته تساوي 1 – . تشكل التبديلات الزوجية زمرة جزئية صامدة من $\mathcal{G}_p$، ذلك أن مجموعة هذه التبديلات هي نواة التماثل $\mathcal{P}$ (راجع الملاحظة 7، ف 7) .

ملاحظة 1 – لنعتبر الشكل (10) من جديد؛ لدينا :

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \prod_{i<j} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)$$

إن الفرق $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ التي نجدها هنا هي نفس الفروق التي تكتب

على الشكل $x_k - x_h$ $(k < h)$ إلاَّ أن ليس لنا دوماً $\sigma(i) < \sigma(j)$ ؛ نرى إذن أن كل ثنائية i, j تحقق :

$$i < j \text{ وَ } \sigma(i) > \sigma(j)$$

تساهم بعامل مقداره -1 في حساب إشارة σ. يسمى عدد هذه الثنائيات **عدد تعاكسات** σ؛ وإذا رمزنا له بِـ $I(\sigma)$ حصلنا على العلاقة :

$$\mathcal{P}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

لنأخذ مثلاً $p = 6$ ولنعتبر التبديل الذي يطبق الأعداد $1, 2, 3, 4, 5, 6$ على :

$$2, 4, 3, 6, 5, 1$$

إن الثنائيات i, j التي تحقق $i < j$ وَ $\sigma(i) > \sigma(j)$ هي إذن :

$$1,6;\ \ 2,3;\ \ 2,6;\ \ 3,5;\ \ 4,5;\ \ 4,6;\ \ 5,6;$$

ومنه نستنتج أن عدد التعاكسات يساوي 7 وأن الإشارة تساوي -1 .

من أجل p كيفي، نعتبر **تبديلاً دائرياً** للأعداد الطبيعية $1, 2, \ldots, p$ أي تبديلاً σ معطى بِـ :

$$\sigma(1) = k, \ldots, \sigma(p - k + 1) = p, \sigma(p - k + 2) = 1,$$
$$\ldots, \sigma(p) = k - 1$$

حيث k عدد طبيعي محصور بين 1 وَ p. إن الثنائيات i, j بحيث $i < j$ وَ $\sigma(i) > \sigma(j)$ هي تلك التي تحقق :

$$1 \leq i \leq p - k + 1 , p - k + 2 \leq j \leq p$$

عندما نعتبر هذه الثنائيات نلاحظ أن العدد i يستطيع أن يأخذ $p - k + 1$ قيمة مختلفة وأن العدد j يستطيع أن يأخذ $k - 1$ قيمة مختلفة ؛ لدينا إذن :

$$I(\sigma) = (k - 1)(p - k + 1) = (k - 1)(p + 1) - k(k - 1)$$

وبما أن $k(k - 1)$ عدد زوجي في كل الحالات فإن :

$$\mathcal{P}(\sigma) = (-1)^{(k-1)(p+1)}$$

فمثلاً، إذا كان $p = 3$ (وبصفة أعم، إذا كان p فردياً) فإن التبديلات الدائرية زوجية.

2. ضد تنظير تابع ذي متغيرات متعددة.

لتكن X مجموعة وَ M زمرة جمعية وَ $p \geq 1$ عدداً صحيحاً وَ f تطبيقاً من X^p في M. **ضد منظر** f هو، تعريفاً، التطبيق g من X^p في M المعطى بِـ:

$$g(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \tag{11}$$

حيث يشمل مجموع الطرف الأيمن كل التبديلات σ في $\mathcal{G}_p$. سنبين من جهة أن g ضد تناظري ثم أن:

$$g(x_1, \ldots, x_p) = 0 \tag{12}$$

عندما يتساوي عنصران من بين العناصر $x_1, \ldots, x_p$.

مثال 1 - إذا كان $p = 3$ فالتابع g معطى بِـ:

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) - f(x, z, y) - \\ - f(y, x, z) - f(z, y, x)$$

والنتائج المنصوص عليها واضحة بالنسبة لهذا المثال.

لإثبات النتائج السابقة نجعل الزمرة $\mathcal{G}_p$ تعمل في المجموعة X^p وذلك بوضع (راجع المثال 21، الفقرة 11، ف 7):

$$\sigma(x) = \left(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(p)}\right)$$

من أجل كل عنصر $x = (x_1, \ldots, x_p)$ في X^p.

عندئذ يُكتب الدستور (11) على النحو :

$$g(x) = \sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma)\cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right)$$

ليكن w تبديلاً كيفياً ، لدينا في هذه الحالة :

$$g\left(w(x)\right) = \sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma)\, f\left(\sigma^{-1}\left(w(x)\right)\right) \tag{13}$$

لكن لما كان التطبيق $\sigma \to w\circ\sigma$ من $\mathcal{G}_p$ في $\mathcal{G}_p$ ، حيث w معطى ، تقابلياً فمن الواضح أن لدينا العلاقة التالية مهما كان التابع φ المعرف على الزمرة $\mathcal{G}_p$:

$$\sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \varphi(\sigma) = \sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \varphi(w\circ\sigma)$$

إذا طبقنا هذه النتيجة على :

$$\varphi(\sigma) = \mathcal{P}(\sigma)\cdot f\left(\sigma^{-1}\left(w(x)\right)\right)$$

ثم لاحظنا أن :

$$\begin{aligned}\varphi(w\circ\sigma) &= \mathcal{P}(w\circ\sigma)\cdot f\left(\sigma^{-1}\left(w^{-1}\left(w(x)\right)\right)\right)\\ &= \mathcal{P}(w)\,\mathcal{P}(\sigma)\, f\left(\sigma^{-1}(x)\right)\end{aligned}$$

ندرك أن (13) تكتب أيضاً على النحو :

$$g\left(w(x)\right) = \sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(w)\,\mathcal{P}(\sigma)\, f\left(\sigma^{-1}(x)\right) = \mathcal{P}(w)\cdot \sum_{\sigma\in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma)\cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right)$$

ومنه يأتي :

$$g\left(w(x)\right) = \mathcal{P}(w)\, g(x)$$

وبذلك نكون أثبتنا أن التابع $g(x) = g(x_1, \ldots, x_p)$ ضد تناظري كما سلف أن ذكرنا .

للبرهان على (12) نفرض مثلاً أن $x_i = x_j$ من أجل عددين i وَ j يحققان $i < j$ ؛ ونرمز بـ τ للتبديل المعرف كما يلي :

$$k \neq i, j$$

$$\tau(k) = k$$

$$\tau(i) = j$$

$$\tau(j) = i$$

من الواضح أن $\mathcal{P}(\tau) = -1$ وبأن لدينا العلاقة الموالية من أجل العنصر $x = (x_1, ..., x_p)$ المعتبر في X^p .

$$\tau^{-1}(x) = \tau(x) = x \tag{14}$$

باستطاعتنا تجميع كل التبديلات الواردة في العبارة :

$$g(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(\sigma^{-1}x\right)$$

في تجمعين : الأول منهما يحتوي على كل التبديلات التي تحقق $\sigma(i) < \sigma(j)$ ، ويحتوي الثاني على تلك التي تحقق $\sigma(i) > \sigma(j)$ ؛ لنرمز بـ $\mathcal{G}'_p$ وَ $\mathcal{G}''_p$ للجزئي $\mathcal{G}_p$ الذين نحصل عليهما بهذه الطريقة نلاحظ أن اتحادهما يساوي $\mathcal{G}_p$ وأن تقاطعهما خال؛ وعليه نجد :

$$g(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}''_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right) + \sum_{w \in \mathcal{G}'_p} \mathcal{P}(w) \cdot f\left(w^{-1}(x)\right) \tag{15}$$

إلّا أن التطبيق $\sigma \rightarrow \sigma \circ \tau$ تقابلي من $\mathcal{G}'_p$ على $\mathcal{G}''_p$؛ ولذا نستطيع تجميع حدود (15) مثنى مثنى وذلك بإلحاق الحد المناسب لِـ σ في المجموع الأول بالحد المناسب لِـ $w = \tau \circ \sigma$ في المجموع الثاني؛ ويكون مجموع هذين الحدين مساوياً لِـ :

$$\mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right) + \mathcal{P}(\tau \circ \sigma) f\left(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(x)\right)$$

أي :

$$\mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right) + \mathcal{P}(\tau) \mathcal{P}(\sigma) \cdot f\left(\sigma^{-1}(x)\right)$$

بفضل (14) . لكن $p(\tau) = -1$ ولذا فهذا المجموع منعدم ؛ وهكذا نجد حدود

المجموعين الواردين في (15)، الواحد منها يعدم الآخر، وبذلك ينتهي برهان (12).

3. التطبيقات المتعددة الخطية المتناوبة.

ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K وَ $p \geq 1$ عدداً صحيحاً. نقول عن تطبيق p الخطية:

$$f : X^p \to M$$

إنه متناوب فيما إذا تحقق $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$ كلما وجد دليلان مختلفان i, j بحيث $x_i = x_j$. إذا كان $p = 1$ فهذا المفهوم هو مفهوم التطبيقات الخطية من X في M؛ وإذا كان $p = 2$ أو $p = 3$ فإننا نعود إلى تعريفات الفصل السابق.

نظرية 2 - إن كل تطبيق متعدد الخطية متناوب، ضد تناظري حتماً.

لإثبات العلاقة (6) من الفقرة 1، نعطي قيمتين ثابتتين لِـ x_i وَ x_{i+1} وننظر لِـ f كتابع لِـ x_i وَ x_{i+1}؛ نحصل عندئذ على تابع ثنائي الخطية لِـ x_i وَ x_{i+1} لأن f متعدد الخطية، وهو متناوب لأن f ينعدم من أجل $x_i = x_{i+1}$؛ نستنتج إذن (العلاقة (2)، الفقرة 1، ف 22) أن العبارة $f(x_1, \ldots, x_p)$ تضرب في $1-$ عندما نستبدل x_i وَ x_{i+1} فيما بينهما، ومنه النظرية.

نرى بفضل نتائج الفقرة 1 أن التطبيقات p الخطية المتناوبة تحقق المتطابقة:

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \mathcal{P}(\sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_p) \qquad (16)$$

نلاحظ أن (16) هي (2) من ف 22 لما $p = 2$ وهي (9) لما $p = 3$.

نظرية 3 - ليكن f تطبيقاً p الخطية من X^p في M؛ إن التطبيق g المعطى بـ:

$$g(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

تطبيق p الخطية متناوب .

من الواضح أن الحد العام في الطرف الأيمن تابع p الخطية لـ $x_1, ..., x_p$ ومنه ندرك أن للتابع g نفس الخاصية علينا إذن أن نبين بأن g ينعدم عندما يتساوي شعاعان من بين $x_1, ..., x_p$ ، وهو ما تنص عليه العلاقة (12) من الفقرة 2 .

مثال 2 – لتكن $u_1, ..., u_p$ أشكالاً خطية على X ؛ عندئذ نجد أن الشكل p الخطي :

$$\sum \mathcal{P}(\sigma) u_1 (x_{\sigma(1)}) \dots u_p (x_{\sigma(p)})$$

متناوب : لرؤية ذلك يكفي تطبيق النظرية 3 على الشكل $u_1 \otimes ... \otimes u_p$ المعرف في ف 21 ، المثال 2 .

يسمى الشكل p الخطية المتناوب الذي نحصل عليه بهذه الكيفية ، **الجداء الخارجي** للأشكال الخطية $u_1, ..., u_p$ ونرمز له بـ :

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_p$$

نظرية 4 – ليكن f تطبيقاً p الخطية متناوباً من X^p في M . لدينا :

$$f(a_1, ..., a_p) = 0$$

كلما كانت الأشعة $a_1, ..., a_p$ عبارات خطية لعدد من الأشعة لا يتجاوز $p - 1$.

للبرهان على هذه النظرية نفرض أن لدينا العلاقات :

$$a_i = \sum_{1 \leq j \leq q} \lambda_{ij} \, b_j$$

يبين الدستور (10) من الفقرة 3 في ف 21 أنه ينتج حينئذ :

$$f(a_1, ..., a_p) = \sum_{j_1, ..., j_p} \lambda_{1;j_1} \dots \lambda_{p;j_p} \, f(b_{j_1}, ..., b_{j_p})$$

لنفرض بعد ذلك أن $q < p$ ؛ عندئذ نرى أن الأعداد $j_1, ..., j_p$ البالغ

عددها p، والمحصورة بين 1 وَ q، لا يمكن أن تكون مختلفة مثنى مثنى؛ لما كان f متناوباً فإن:

$$f(b_{j_1}, ..., b_{j_p}) = 0$$

مهما كانت الأعداد $j_1, ..., j_p$ ومنه النتيجة المطلوبة.

نتيجة 1 - ليكن X وَ M فضاءين شعاعيين على حقل تبديلي وَ f تطبيقاً متعدد الخطية متناوباً من X^p في M. لدينا:

$$f(a_1, ..., a_p) = 0$$

فيما إذا كانت الأشعة $a_1, ..., a_p$ غير مستقلة خطياً.

لرؤية ذلك نفرض وجود علاقة خطية:

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p = 0$$

غير تافهة، مع $\lambda_p \neq 0$ مثلاً، نستطيع أن نستنتج مادام K حقلاً، أن a_p يكتب على شكل عبارة خطية لِـ $a_1, ..., a_{p-1}$؛ ولذا فإن الأشعة $a_1, ..., a_p$ البالغ عددها p، تكتب بالضرورة على شكل عبارات خطية لِـ $p - 1$ شعاع من بين تلك الأشعة، بعد ذلك يكفي تطبيق النظرية 4.

نتيجة 2 - ليكن X مقياساً حراً على K له أساس مشكل من r شعاع. إن كل تطبيق p الخطية متناوب من X^p في M، منعدم حتماً لما $r + 1 \leq p$.

يرجع ذلك إلى أنه من أجل كل $x_1, ..., x_p$ في X نستطيع في هذه الحالة التعبير خطياً على العناصر x_i بواسطة أشعة عددها r $p > r$.

مثال 3 - ليس من المفيد دراسة الأشكال p الخطية المتناوبة من أجل $r < p$ عندما نعتبر فضاء شعاعياً بعده r؛ ويكفي أن نقتصر على الأعداد $p = 1, 2, ..., r$.

فمثلاً إذا كان X هو الفضاء المعتاد على $K = \mathbf{R}$، والمعرف بأبعاده الثلاثة، فإنه لا يوجد أي شكل p الخطية متناوب ما عدا الشكل المنعدم في حالة ما إذا كان $4 \leq p$.

ستسمح لنا الفقرة الموالية بتحديد النتيجة السابقة لتصبح على النحو التالي : إذا كان لِـX أساس يتكون من r شعاع فإنه توجد على X أشكال r الخطية متناوبة لا تطابق الصفر .

4. التوابع p الخطية المتناوبة على مقياس متشاكل مع K^p .

ندرس فيما يلي التطبيقات p الخطية المتناوبة من X^p في M عندما يكون المقياس X حراً ومن صنف منته . سنحصر دراستنا في هذه الفقرة في الحالة الخاصة التي يكون فيها X متشاكلاً مع K^p ، أي عندما يقبل X أساساً مشكلاً من p شعاع $a_1, ..., a_p$ ؛ أما الحالة العامة فسنتناولها الفقرة 7 .

بوضع :

$$x_i = \sum_{1 \leq j \leq p} \xi_{ij} \, a_j$$

تبين لنا النظرية 3 من ف 21 أن(*) .

$$f(x_1, ..., x_p) = \sum C_{i_1 \dots i_p} \, \xi_{1i_1} \dots \xi_{pi_p} \tag{17}$$

حيث :

$$C_{i_1 \dots i_p} = f(a_{i_1}, ..., a_{i_p}) \tag{18}$$

لما كان f متناوباً فإننا نستنتج أولاً بأن :

$$C_{i_1, \dots, i_p} = 0 \tag{19}$$

عندما لا تكون الأعداد $i_1, ..., i_p$ مختلفة مثنى مثنى ؛ ولذا نستطيع أن نقتصر في (17) على الحدود التي من أجلها تكون الأعداد $i_1, ..., i_p$ ، البالغ عددها p ، مختلفة مثنى مثنى ؛

لكن لما كانت تلك الأعداد محصورة بين 1 وَ p فهي بالتالي تشكل تبديلاً لِـ $1, 2, ..., p$ - أي أنه يوجد تبديل وحيد σ في $\mathcal{G}_p$ بحيث :

(*) نكتب في الحسابات الموالية الأعداد السلمية على يمين أو يسار عناصر M وهو ما لا يغير في الأمر شيئاً بسبب تبديلية K .

$$i_1 = \sigma(1), \ldots, i_p = \sigma(p)$$

ومنه يأتي :

$$c_{i_1 \ldots i_p} = f\left(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(p)}\right) = \mathcal{P}(\sigma)\, f(a_1, \ldots, a_p)$$

لأن f متناوب .

نرى إذن أن المجموع (17) يكتب :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = f(a_1, \ldots, a_p) \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot \xi_{1,\sigma(1)} \cdots \xi_{p,\sigma(p)} \tag{20}$$

للنظر في القضية العكسية نلاحظ أن كل تطبيق f من X^p في M يحقق هذه العلاقة هو تطبيق متعدد الخطية متناوب لرؤية ذلك يكفي أن نبين بأن العبارة :

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot \xi_{1,\sigma(1)} \cdots \xi_{p,\sigma(p)} \tag{21}$$

شكل p الخطية متناوب على X^p . لنرمز بِـ $u_1, \ldots, u_p$ للتوابع الإحداثية للمقياس X بالنسبة للأساس $a_1, \ldots, a_p$ ؛ لدينا :

$$\xi_{ij} = u_j(x_i)$$

وبالتالي :

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum \mathcal{P}(\sigma) \cdot u_{\sigma(1)}(x_1) \ldots u_{\sigma(p)}(x_p) \tag{22}$$

لكنه باستطاعتنا كتابة الجداء الوارد في الطرف الأيمن حسب الترتيب :

$$\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(p)$$

بدل كتابته حسب الترتيب $1, \ldots, p$ ، ذلك لأن K تبديلي .

وبالتالي نرى بأن :

$$u_{\sigma(1)}(x_1) \ldots u_{\sigma(p)}(x_p) = u_1(x_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots u_p(x_{\sigma^{-1}(p)})$$

بحيث تكتب (22) على النحو التالي أيضاً :

$$D(x_1, ..., x_p) = \sum \mathcal{P}(\sigma) \cdot u_1(x_{\sigma-1(1)}) ... u_p(x_{\sigma-1(p)})$$

وبما أن $\mathcal{G}_p$ زمرة فإن التطبيق $\sigma \to \sigma^{-1}$ من $\mathcal{G}_p$ في $\mathcal{G}_p$ تقابلي؛ بتعويض σ بـ σ^{-1} في المجموع السابق فنحن لا نغير إذن سوى ترتيب الحدود، ولذا يأتي :

$$D(x_1, ..., x_p) = \sum \mathcal{P}(\sigma^{-1}) u_1(x_{\sigma(1)}) ... u_p(x_{\sigma(p)})$$

وذلك بمراعاة المساواة :

$$\mathcal{P}(\sigma)^{-1} = p(\sigma)^{-1} = \mathcal{P}(\sigma)$$

ومنه يبقى :

$$D(x_1, ..., x_p) = \sum \mathcal{P}(\sigma) \cdot u_1(x_{\sigma(1)}) ... u_p(x_{\sigma(p)}) \tag{23}$$

وهو ما يثبت (المثال 2) أن D ليس سوى الجداء الخارجي للأشكال الخطية $u_1, ..., u_p$:

$$D = u_1 \wedge ..., \wedge u_p \tag{24}$$

وعليه فإن D شكل p الخطية متناوب على X^p كما سبق أن ذكرنا، أما الدستور (20) فهو يميز التطبيقات p الخطية المتناوبة من X^p في مقياس M على K.

نشير إلى أن لدينا :

$$D(a_1, ..., a_p) = 1 \tag{25}$$

ذلك أن :

$$u_i(a_j) = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$$

بحيث أنه إذا حسبنا $D(a_1, ..., a_p)$ بواسطة الدستور (22) فإن الحد الوحيد الذي قد يكون غير منعدم هو ذلك الذي لدينا من أجله : $\sigma(1) = 1, ..., \sigma(p) = p$؛ عندئذ تتحقق لدينا المساواة : $u_{\sigma(i)}(a_i) = 1$ ، كما أن : $\mathcal{P}(\sigma) = +1$ وهو ما يعطينا (25) بالفعل.

بالإضافة إلى ذلك تميز العلاقة (25) D ، ذلك أن (20) تؤدي إلى :

$$f = f(a_1, \ldots, a_p) D$$

مهما كان الشكل p الخطية المتناوب f، على X^p ؛ وبالتالي فالعلاقة $f(a_1, \ldots, a_p) = 1$ تقتضي $f = D$.

أخيراً يتبين أننا أنهينا برهان النتيجة التالية :

نظرية 5 - ليكن X مقياساً حراً من صنف منته على حلقة تبديلية K . ليكن $(a_1, \ldots, a_p)$ أساساً لِـ X . عندئذ يوجد شكل وحيد p الخطية متناوب D على X^p ، يحقق :

$$D(a_1, \ldots, a_p) = 1$$

ولدينا :

$$D(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma) \cdot \xi_{1, \sigma(1)}, \ldots, \xi_{p, \sigma(p)}$$

مهما كانت الأشعة :

$$x_i = \sum \xi_{ij} \; a_j \qquad (1 \leq i \leq p)$$

أخيراً مهما كان التطبيق p الخطية المتناوب f على X^p في مقياس M على K ، فإن :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = D(x_1, \ldots, x_p) \cdot f(a_1, \ldots, a_p)$$

مهما كانت الأشعة $x_1, \ldots, x_p$ في X .

ها هي الآن نتيجة مفيدة من هذه النظرية :

نتيجة - ليكن X مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة تبديلية K . إن لكل أسس X أعداد عناصر متساوية .

لرؤية ذلك نأخذ أساسين $(a_1, \ldots, a_p)$ وَ $(b_1, \ldots, b_q)$ لِـ X ؛ بالإستناد إلى النظرية السابقة يوجد على X شكل q الخطية متناوب f بحيث :

$$f(b_1, \ldots, b_q) = 1$$

وعليه فالتابع f لا يطابق الصفر، وبما أن X يقبل أساساً مشكلاً من p شعاع يأتي $q \leq p$ حسب نتيجة النظرية 4. لكن $p \leq q$ وهو مانحصل عليه باتباع نفس الخطوات السابقة، نجد في الأخير أن $p = q$ وهو المطلوب.

5. معين جملة أشعة، معين مصفوفة، معين تماثل داخلي.

ليكن X مقياساً على K وَ $(a_1, ..., a_p)$ أساساً له، وَ $x_1, ..., x_p$ أشعة عددها p من X، **معين** $x_1, ..., x_p$ **بالنسبة للأساس** $a_1, ..., a_p$ هو العدد السلمي $D(x_1, ..., x_p)$ المعطى بالعلاقة (21) الواردة في الفقرة السابقة.

من جهة أخرى إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \alpha_{1p} \dots \alpha_{pp} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة معاملاتها في K، فإن **معين** A تعريفاً هو العدد السلمي:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots \\ \alpha_{1p} \dots \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma)\, \alpha_{1,\sigma(1)} \dots \alpha_{p,\sigma(p)}$$

ويرمز له أيضاً بِـ:

$$\text{dét}\,(A)$$

من الواضح أن بعد هذا التعريف، نستطيع كتابة (21) على النحو:

$$D(x_1, ..., x_p) = \begin{vmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{p1} \\ \vdots \dots \vdots \\ \xi_{1p} \dots \xi_{pp} \end{vmatrix}$$

وقد رأينا في الفقرة السابقة أن هذا المعين يعطي كذلك بالدستور (23)، أي أنه يساوي أيضاً العبارة:

$$\sum \mathcal{P}(\sigma) \cdot \xi_{\sigma(1),1} \cdots \xi_{\sigma(p),p}$$

التي تنتج عن (21) بتعويض ξ_{ij} بِـ ξ_{ji} ؛ إذن :

نظرية 6 – إن معين مصفوفة مربعة معاملاتها في حلقة تبديلية يساوي معين منقولة المصفوفة المعتبرة .

ها هي الآن نتيجة هامة أخرى :

نظرية 7 – لتكن A وَ B مصفوفتين من الرتبة p ، معاملاتهما في حلقة تبديلية K . لدينا إذن :

$$\text{dét}\,(AB) = \text{dét}\,(A)\,\text{dét}\,(B)$$

ليكن X مقياساً على K يقبل أساساً $a_1, \dots, a_p$ ؛ ليكن u وَ v التماثلين الداخليين لِـ X اللذين يمثلاهما المصفوفتان A وَ B بالنسبة للأساس المعتبر ؛ إن المصفوفة AB توافق عندئذ التطبيق المركب $u \circ v$.

ليكن $D(x_1, \dots, x_p)$ معين $x_1, \dots, x_p$ المنتمية لِـ X وذلك بالنسبة للأساس $a_1, \dots, a_p$. نعرف تطبيقاً جديداً D_u من X^p في K ، وهذا بوضع :

$$D_u(x_1, \dots, x_p) = D\big(u(x_1), \dots, u(x_p)\big)$$

ومنه يأتي أن D_u تطبيق p الخطية متناوب . لرؤية ذلك نلاحظ في البداية أن D_u متعدد الخطية ، لأن لو نعطي لِـ $x_2, \dots, x_p$ مثلاً قيماً ثابتة $b_2, \dots, b_p$ ثم نضع $c_i = u(b_i)$ لتبقت لدينا العبارة :

$$D\big(u(x_1), b_2, \dots, b_p\big)$$

التي نجدها بدلالة x_1 ، وهو ما نحصل عليه بتركيب التطبيقين الخطيين u وَ $x_1 \to D(x_1, b_2, \dots, b_p)$ ، الأمر الذي يبين بالفعل أن التابع المركب خطي بالنسبة لِـ x_1 . وهكذا نتأكد من أن D_u تابع متعدد الخطية ، ثم إنه من الواضح أن D_u متناوب لأن العلاقة $x_i = x_j$ تؤدي إلى $u(x_i) = u(x_j)$ ، وبالتالي : $D\big(u(x_1), \dots, u(x_p)\big) = 0$.

لما كان D_u p الخطية متناوباً، تبين النظرية 5 أن لدينا :

$$D_u(x_1, ..., x_p) = D_u\ (a_1, ..., a_p)\ D(x_1, ..., x_p) \tag{26}$$

مهما كانت العناصر x_i؛ لكن بما أن :

$$u(a_i) = \sum_j \alpha_{ij}\ a_j$$

حيث $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ ، فإننا نرى كون :

$$D_u\ (a_1, ..., a_p) = D\big(u(a_1), ..., u(a_p)\big) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{p1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{1p} \ldots \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \text{dét}(A)$$

بحيث أن (26) تكتب كما يلي :

$$D\big(u(x_1), ..., u(x_p)\big) = \text{dét}\,(A)\ D(x_1, ..., x_p) \tag{27}$$

كما أن لدينا :

$$D\big(v(x_1), ..., v(x_p)\big) = \text{dét}\,(B)\ D(x_1, ..., x_p)$$

ويوضع $w = u \circ v$ نجد أيضاً أن :

$$D\big(w(x_1), ..., w(x_p)\big) = \text{dét}\,(AB)\ D(x_1, ..., x_p) \tag{28}$$

لكن :

$$\begin{aligned} D\big(w(x_1), ..., w(x_p)\big) &= D\Big(u\big(v(x_1)\big), ..., u\big(v(x_p)\big)\Big) \\ &= \text{dét}\,(A) \cdot D\big(v(x_1), ..., v(x_p)\big) \\ &= \text{dét}\,(A)\,\text{dét}\,(B)\ D(x_1, ..., x_p) \end{aligned}$$

نقارن أخيراً بالعلاقة (28) وبذلك نختم برهان النظرية.

يُؤدي الدستور (27) إلى المفهوم التالي. ليكن u تماثلا داخلياً لِـ X؛ لما كان الشكل p الخطية المتناوب D_u متناسباً مع D ، فإنه يوجد عدد سلمي نرمز له بِـ :

$$\text{dét}\,(u)$$

بحيث :

$$D\big(u(x_1), \dots, u(x_p)\big) = \text{dét}\,(u)\; D(x_1, \dots, x_p)$$

مهما كانت العناصر x_i في X ؛ من جهة أخرى لما كان كل شكل p الخطية متناوب f على X^p ، يتناسب مع D ، حسب النظرية 5 ، فإن :

$$f\big(u(x_1), \dots, u(x_p)\big) = \text{dét}\,(u) \cdot f(x, \dots, x_p) \tag{29}$$

نقول عن العدد السلمي $\text{dét}\,(u)$ إنه معين التماثل الداخلي u . إذا كانت A هي مصفوفة u بالنسبة لأساس كيفي لِـ X ، فإن الحسابات الواردة أعلاه تبين (بتطبيق (29) على المعين بالنسبة للأساس المعتبر) أن :

$$\text{dét}\,(u) = \text{dét}\,(A)$$

من الواضح أنه إذا كان u وَ v تماثلين داخليين لِـ X ، فإن :

$$\text{dét}\,(u \circ v) = \text{dét}\,(u)\,\text{dét}\,(v) \tag{30}$$

ومن جهة أخرى يتضح من خلال الدستور (29) أن معين التماثل الداخلي المطابق في X يساوي 1 .

ملاحظة 2 – يتبين مما سبق أنه إذا كان u تماثلاً داخلياً لِـ X فإن معين مصفوفة u بالنسبة لأساس لِـ X ، مستقل عن هذا الأساس . يمكن إدراك ذلك أيضاً باتباع الخطوات التالية . لتكن A مصفوفة u بالنسبة لأساس لِـ X ؛ في هذه الحالة تكتب مصفوفات u بالنسبة لأسس X الأخرى ، على الشكل :

$$\mathrm{U}\, A\, \mathrm{U}^{-1}$$

حيث $\mathrm{U} \in GL(p, K)$ كما سبق أن رأينا في ف 15 . لكن :

$$\text{dét}\,(\mathrm{U}\;A\;\mathrm{U}^{-1}) = \text{dét}\,(\mathrm{U}) \cdot \text{dét}\,(A) \cdot \text{dét}\,(\mathrm{U}^{-1})$$

ومن جهة أخرى :

$$\text{dét}\,(\mathrm{U})\,\text{dét}\,(\mathrm{U}^{-1}) = \text{dét}\,(I_p) = 1$$

إذن :

$$\text{dét}\,(U^{-1}) = \text{dét}\,(U)^{-1}$$

تنتج أخيراً العلاقة :

$$\text{dét}\,(U\ A\ U^{-1}) = \text{dét}\,(A)$$

وهي النتيجة المطلوبة .

6. تمييز أسس فضاء شعاعي ذي بعد منته .

نستخلص من نتائج الفقرات السابقة النظرية التالية :

نظرية 8 – ليكن X فضاء شعاعياً بعده p على حقل تبديلي ، وَ $a_1, ..., a_p$ أساساً لِـ X وَ العناصر :

$$x_i = \sum \xi_{ij}\ a_j \qquad (1 \leq i \leq p)$$

من X البالغ عددها p . إن الخاصيات التالية متكافئة :

أ) الأشعة $x_1, ..., x_p$ مستقلة خطياً .

ب) تشكل الأشعة $x_1, ..., x_p$ أساساً لِـ X .

جـ) تقبل المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{p1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{1p} \cdots \xi_{pp} \end{pmatrix}$$

القلب .

د) لدينا :

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{p1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{1p} \cdots \xi_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

للبرهان على النظرية نلاحظ أن تكافؤ الشرطين أ) وَ ب) ناتج عن النظرية 10 ، ف 19 . أما تكافؤ الشرطين ب) وَ ج) فقد سبق أن أثبتناه ضمن النظرية 1 من ف 15 .

لنرمز بـ D للشكل المتعدد الخطية المتناوب الذي يعرّف المعين بالنسبة للأساس $a_1, \ldots, a_p$ ، عندئذ نجد أن الشرط د) يكتب $D(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$ ؛ وهو يقتضي أ) بفضل النتيجة 1 للنظرية 4 . بقي أن نثبت بأن ب) يستلزم د) ؛ لنلاحظ أنه إذا كانت العناصر x_i تشكل أساساً ، فإنه يوجد (حسب النظرية 5) شكل p الخطية متناوب f على X^p بحيث :

$$f(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$$

لما كان كل شكل p الخطية متناوب على X^p ، متناسباً مع D فإننا نستنتج بالضرورة :

$$D(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$$

وهو الشرط د) بالذات ، وبذلك ينتهي البرهان .

نتيجة 1 - لكي تكون مصفوفة مربعة ذات معاملات في حقل تبديلي K ، قابلة للقلب يجب ويكفي أن يكون معينها غير منعدم .

هذا ناتج عن تكافؤ الخاصيتين ج) وَ د) الواردتين في النظرية 8 .

نتيجة 2 - ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K وَ u تماثلاً داخلياً لـ L . عندئذ تكون الخاصية التالية متكافئة :

أ) u تقابلي

ب) u غامر

ج) u متباين

د) لدينا $\text{Ker}(u) = 0$ أي أن العلاقة $u(x) = 0$ تستوجب العلاقة $x = 0$.

ر) معين u غير منعدم .

لقد سبق أن أثبتنا تكافؤ الخاصيات الأربع الأولى سواء كان K تبديلياً أو لا (راجع النتيجة 1 للنظرية 13، ف 19)؛ من جهة أخرى لكي يكون u تقابلياً يجب ويكفي (راجع الفقرة 2، ف 15) أن تكون مصفوفته A بالنسبة لأساس لِـ L قابلة للقلب أي أن يكون $\text{dét}(A)$ غير منعدم حسب النتيجة السابقة؛ لكن لما كان:

$$\text{dét}(A) = \text{dét}(u)$$

فإننا نرى إذن بأن الخاصيتين أ) وَ ر) متكافئتان.

نتيجة 3 - لكي تقبل جملة مؤلفة من n معادلة خطية ومتجانسة وذات n مجهولاً:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{n1}\xi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = 0 \end{cases}$$

معاملاتها في حقل تبديلي K، لكي تقبل حلاً غير تافه يجب ويكفي أن تتحقق المساواة:

$$\text{dét}((\alpha_{ij})) = 0$$

للبرهان على ذلك نلاحظ بالإستناد إلى النظرية 2 من ف 20 (وهي التي تمة على تكافؤ الشرطين ر) وَ س) ان وجود حل غير تافه يعني أن المصفوفة (α_{ij}) لا تقبل القلب.

نتيجة 4 - لكي تقبل جملة من n معادلة خطية ذات n مجهولاً:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{n1}\xi_n = \beta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\xi_1 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases}$$

معاملاتها في حقل تبديلي، لكي تقبل حلاً وحيداً (أي لكي تكون هذه الجملة من نوع كرامر) يجب ويكفي أن تتحقق المساواة:

$$\text{dét}((\alpha_{ij})) \neq 0$$

نستخلص هذه النتيجة من تكافؤ الخاصيات أ) وَ د) وَ س) الواردة في النظرية 2 من ف 20.

سنرى في الفصل الموالي أن نظرية المعينات تقدم دستوراً صريحاً لحساب حل جملة من جمل كرامر.

ملاحظة 3 - سيبين لنا الفصل الموالي أن النتيجة 1 تشمل الحلقات التبديلية شريطة استبدال الشرط $\text{dét}(A) \neq 0$ بالشرط الذي ينص على أن معين المصفوفة A عنصر من الحلقة K يقبل القلب.

ملاحظة 4 - نفرض أن K هو الحقل $\mathbf{R}$ المؤلف من الأعداد الحقيقية، وليكن X فضاء شعاعياً حقيقياً، بعده منته p. نعتبر أساسين $(a_1, ..., a_p)$ وَ $(b_1, ..., b_p)$ لِـ X، ونرمز بِـ:

$$D(b_1, ..., b_p; a_1, ..., a_p)$$

لمعيّن الأشعة $b_1, ..., b_p$ بالنسبة للأساس $(a_1, ..., a_p)$؛ فهو إذن معين مصفوفة الانتقال من الأساس (a_i) إلى الأساس (b_i). إذا كانت لدينا ثلاثة أسس (a_i)، (b_i)، (c_i) لِـ X فإن مصفوفة الإنتقال من الأساس الأول إلى الثالث هي جداء مصفوفة الانتقال من الأساس الأول إلى الثاني بمصفوفة الانتقال من الأساس الثاني إلى الثالث؛ ومنه نستنتج (النظرية 7) أن:

$$D(c_1, ..., c_p; a_1, ..., a_p) = D(c_1, ..., c_p; b_1, ..., b_p) \cdot D(b_1, ..., b_p; a_1, ..., a_p)$$

لما كان:

$$D(a_1, ..., a_p; a_1, ..., a_p) = 1$$

فإن:

$$D(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_p = D(b_1, ..., b_p; a_1, ..., a_p)^{-1}$$

بعد هذا، نقول عن أساسين $(a_1, ..., a_p)$ وَ $(b_1, ..., b_p)$ إن لهما **نفس التوجيه** إذا كان:

$$D(b_1 ..., b_p; a_1, ..., a_p) > 0$$

ونقول أن **توجيهيهما متعاكسان** إذا لم يتحقق الشرط السابق. تبين العلاقات الثلاث التي كنا بصدد إثباتها أن الخاصية التي تقول عن أساسين أن لهما نفس التوجيه، علاقة تكافؤ في مجموعة أسس X؛ زيادة على ذلك، تحلل

مجموعة هذه الأسس، بواسطة علاقة التكافؤ المشار إليها أعلاه، إلى صفين لا غير [لرؤية ذلك نختار أساساً (a_i) ونحتفظ به؛ تشكل الأسس التي لها نفس توجيه (a_i)، الصف الأول، وتشكل الأسس التي لها توجيه معاكس لتوجيه (a_i)، الصف الثاني، لأن إذا كان لِـ(b_i) وَ(c_i) توجيهان معاكسان لِـ(a_i) فإن لِـ(b_i) وَ(c_i) نفس التوجيه ذلك لأن جداء عددين سالبين عدد موجب].

نعرف **توجيه** X بأنه كل صف من صفي التكافؤ السابقين: وعليه فإن لِـX توجيهين محتملين. نقول، تعريفاً، أننا **وجهنا** X عندما يتم إختيار توجيه X، أي عندما نختار صفاً من بين الصفين المعرفين أعلاه.

إن أيسر كيفية لتوجيه X هو أن نختار أساساً (a_i) لِـX ثم نعلن بعدها أن توجيه X هو الصف (من الصفين) الذي ينتمي إليه الأساس (a_i).

عندما نوجه الفضاء الشعاعي X، فإننا نصف الأسس المنتمية للتوجيه المختار على X **بمباشرة** أو بأنها **موجهة إيجابياً**، أما الأسس الأخرى فنصفها بأنها **رجعية** أو **موجهة سلبياً**.

ليكن X فضاء شعاعياً كيفياً، ليس هناك أية وسيلة «طبيعية» أو «قانونية» أو «ذاتية» لإختيار توجيه لِـX - بعبارة أخرى فإن مفهوم «الأساس المباشر» تفرض دوماً اختياراً كيفياً وليس له أي معنى مطلق. يبدو في الفضاء الفيزيائي أن القاعدة المسماة «ماكسويل» أو «أمبير» تقدم طريقة «طبيعية» للتمييز بين الزوايا المثلثية «المباشرة» و «الرجعية»؛ لكن ليس لمفهوم ماكسويل ولا لمفهومي «اليسار» و«اليمين» (اللذين يعتمد عليهما المفهوم الأول) أي معنى رياضي.

إن الفضاءات الوحيدة حيث نستطيع إختيار توجيه موجب بصفة قانونية هي الفضاءات $\mathbf{R}^n$: فمن الطبيعي أن نعلن بخصوص هذه الفضاءات بأن صفة مباشر صفة يختص بها كل أساس موجه مثل الأساس القانوني لِـ $\mathbf{R}^n$. أما الفضاء الفيزيائي فهو متشاكل مع $\mathbf{R}^3$ وليس مطابقاً له، ولا يمكن تعريف تشاكل من الفضاء الأول في الفضاء الثاني إلّا بعد اختيار أساس للفضاء الأول...

7. التطبيقات المتعددة الخطية : الحالة العامة .

درسنا لحد الآن التطبيقات p الخطية المتناوبة في مقياس (على حلقة K) متشاكل مع K^p . لدينا في الحالة العامة نتائج مماثلة لكنها أكثر تعقيداً :

نظرية 9 - ليكن X وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K نفرض أن X حر ومن صنف منته؛ وليكن $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ أساساً لِـ X . لكي يكون تطبيق p الخطية f من X^p في M متناوباً يجب ويكفي أن تحقق معاملاته :

$$c_{i_1 \dots i_p} = f(a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$$

بالنسبة للأساس المعتبر الشرطين التاليين :

$$c_{i_1 \dots i_p} = 0 \tag{31}$$

هذا إذا كانت $i_1, \dots, i_p$ غير مختلفة مثنى مثنى ؛

$$c_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} = \mathcal{P}(\sigma) \cdot c_{i_1 \dots i_p} \tag{32}$$

مهما كان التبديل σ في $\mathcal{G}_p$.

إذا تحقق هذان الشرطان فإن :

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} c_{i_1 \dots i_p} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} & - & \xi_{p,i_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{1,i_p} & - & \xi_{p,i_p} \end{vmatrix} \tag{33}$$

مهما كانت الأشعة :

$$x_i = \sum_{1\leq j\leq n} \xi_{ij}\, a_j \in X$$

نضع $a_{i_1} = b_1, \dots, a_{i_p} = b_p$ ؛ إذا لم تكن الدليلات $i_1, \dots, i_p$ مختلفة مثنى مثنى فإن هناك على الأقل شعاعين متساويان من بين الأشعة $b_1, \dots, b_p$ ، بحيث إذا كان f متناوباً فذلك يؤدي إلى : $f(b_1, \dots, b_p) = 0$ ، ومنه (31) . لنكتب :

$$f(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(p)}) = \mathcal{P}(\sigma)\, f(b_1, \ldots, b_p)$$

ولنلاحظ أن :

$$b_{\sigma(k)} = a_{i_{\sigma(k)}}$$

فنحصل على العلاقة (32) أيضاً.

بخصوص القضية العكسية نفرض أن (31) وَ (32) محققتان؛ نستطيع في الدستور :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum c_{i_1 \ldots i_p}\, \xi_{1, i_1} \ldots \xi_{p, i_p} \tag{34}$$

أن نقتصر على المتتاليات $i_1, \ldots, i_p$ المؤلفة من أعداد طبيعية مختلفة مثنى مثنى ومحصورة بين 1 وَ n، وذلك أثناء الجمع في الطرف الأيمن.

نرمز مؤقتاً بـ S لمجموعة تلك المتتاليات ولتكن S^+ المجموعة الجزئية من S، المؤلفة من المتتاليات $i_1, \ldots, i_p$ التي تحقق :

$$i_1 < \ldots < i_p \tag{35}$$

من الواضح أننا نحصل على أية متتالية من S بطريقة وحيدة وذلك بإجراء تبديل لائق لمتتالية تحقق (35)؛ أي أنه إذا ألحقنا كل متتالية $(i_1, \ldots, i_p)$ تحقق (35) وكل تبديل σ من $\mathcal{G}_p$، بالمتتالية $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)})$، فإننا نعرف تقابلاً من المجموعة $S^+ \times \mathcal{G}_p$ على S.

وبالتالي فإن الدستور (34) يكتب أيضاً على النحو :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} c_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}}\, \xi_{1, i_{\sigma(1)}} \ldots \xi_{p, i_{\sigma(p)}}$$

بمراعاة (32) نجد إذن :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} c_{i_1 \ldots i_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_p} \mathcal{P}(\sigma)\, \xi_{1, i_{\sigma(1)}} \ldots \xi_{p, i_{\sigma(p)}}$$

وإذا وضعنا $\alpha_{kh} = \xi_{k, i_h}$ وجدنا أن المجموع الجزئي المأخوذ على $\mathcal{G}_p$، هو :

$$\sum \mathcal{P}(\sigma)\, \alpha_{1, \sigma(1)} \ldots \alpha_{p, \sigma(p)}$$

أي أنه يساوي معين المصفوفة :

$$(36)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots \\ \alpha_{1p} \dots \alpha_{pp} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} \dots \xi_{p,i_1} \\ \dots\dots\dots \\ \xi_{1,i_p} \dots \xi_{p,i_p} \end{vmatrix}$$

وهو ما يثبت (33) . يبقى أن نبين بأن f متناوب .

نرمز بـ u_i $(1 \le i \le n)$ للتوابع الإحداثية للمقياس X بالنسبة للأساس $(a_i)_{1 \le i \le n}$، عندئذ تصبح العبارة $\xi_{1,i_1} \dots \xi_{p,i_p}$ تساوي قيمة الشكل p الخطية $u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_p}$ على الأشعة $x_1, \dots, x_p$ ، ذلك أن لدينا بصفة عامة :

$$\xi_{ij} = u_j(x_i)$$

ومنه يأتي بإجراء حساب مماثل للحساب الذي فصلناه في الفقرة 4 (أنظر الانتقال من (22) إلى (23)) بأن المعين (36) يساوي قيمة الجداء الخارجي $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$على الأشعة $x_1, \dots, x_p$ ، وهو الجداء الذي عرفناه ضمن المثال 2 الوارد في الفقرة 3 . وعليه يكتب الدستور (33) كما يلي :

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} c_{i_1 \dots i_p}\, u_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_p)$$

حيث وضعنا :

$$(38)\qquad u_{i_1 \dots i_p} = u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$$

لما كانت الأشكال $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$ متناوبة (المثال 2) فإن الأمر الذي كذلك بالنسبة لـf، وبذلك ينتهي البرهان .

عندما يكون $M = K$ نستنتج بسهولة مما سبق أن الأشكال (38) تشكل، من أجل $i_1 < \dots < i_p$ ، أساساً لمقياس الأشكال p الخطية المتناوبة على X^p . إن عدد الأشكال (38) يساوي :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

لأن هذا المعامل يساوي أيضاً عدد المتتاليات المتزايدة تماماً والمؤلفة من p عدد صحيح محصور بين 1 وَ n (إن هذه المتتاليات توافق بصفة تقابلية الأجزاء المكونة من p عنصر، والمحتواة في مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 وَ n) .

إنه من السهل والمفيد أن نحسب قيم الأشكال p الخطية المتناوبة $u_{i_1 \dots i_p}$ على أشعة الأساس. نتيجة تلك الحسابات هي:

$$u_{i_1 \dots i_p}(a_{j_1}, \dots, a_{j_p}) = \mathcal{P}(\sigma) \tag{39}$$

إذا وجد تبديل σ في $\mathcal{G}_p$ بحيث:

$$j_1 = i_{\sigma(1)}, \dots, j_p = i_{\sigma(p)}$$

وَ:

$$u_{i_1 \dots i_p}(a_{j_1}, \dots, a_{j_p}) = 0 \tag{40}$$

إن كان الأمر عكس ذلك.

ويرجع ذلك إلى أن الطرف الأيسر يساوي (حسب النظرية 3، ف 21) معامل $\xi_{1j_1} \dots \xi_{pj_p}$ في نشر $u_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_p)$ بدلالة إحداثيات الأشعة $x_1, \dots, x_p$؛ ونحن نعلم أن هذا النشر هو:

$$u_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_p) = \sum \mathcal{P}(\sigma)\xi_{1,i_{\sigma(1)}} \dots \xi_{p,i_{\sigma(p)}}$$

ومنه يأتي مباشرة الدستوران (39) وَ (40).

8. قاعدة الإستقلال الخطي.

نستطيع تعميم النظرية 8 كالتالي:

نظرية 10 – ليكن X فضاء شعاعياً بعده n، على حقل تبديلي وَ $a_1, \dots, a_n$ أساساً لِـ X، وَ:

$$x_i = \sum_{1 \le j \le n} \alpha_{ij}\, a_j \qquad (1 \le i \le p)$$

عناصر من X، إن الشروط التالية متكافئة:

أ) الأشعة $x_1, \dots, x_p$ مستقلة خطياً.

ب) يوجد على X شكل p الخطية متناوب f بحيث :

$$f(x_1, ..., x_p) \neq 0$$

ج) نستطيع استخراج مصفوفة مربعة رتبتها p ومعينها غير منعدم من المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1n} \dots \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

باتخاذ الرموز المستعملة في الفقرة السابقة، نرى أن المعينات من الرتبة p المستخرجة من هذه المصفوفة هي الأعداد السلمية $u_{i_1 \dots i_p}(x_1, ..., x_p)$ ؛ كما نلاحظ أنه إذا لم ينعدم عدد من هذه الأعداد فإن الشرط ب) يتحقق – وهو كذلك حتى ولو كان $f = u_{i_1 \dots i_p}$ من أجل إختيار لائق لـ $i_1, ..., i_p$. إذن ج) يستوجب ب) . من جهة أخرى نلاحظ أن ب) يستوجب أ) بفضل النظرية 4 .

إذا تحقق الشرط أ) فإنه يوجد أساس لـ X يبدأ بـ $x_1, ..., x_p$ ؛ ولذا تبين العلاقة (39) وجود شكل p الخطية متناوب يأخذ على $x_1, ..., x_p$ قيمة غير منعدمة . وعليه فالشرط أ) يستوجب ب) .

بقي أن نبين بأن ب) يقتضي ج) . نشير بخصوص ذلك إلى أن الدستور (37) يثبت أنه إذا كان $f(x_1, ..., x_p)$ غير منعدم فإن هناك على الأقل عدداً من بين الأعداد السلمية $u_{i_1 \dots i_p}(x_1, ..., x_p)$ ، غير منعدم ؛ تلك هي الخاصية ج) بالضبط

بذلك يختم برهان النظرية .

ملاحظة 5 – لتكن :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{p1} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1n} \dots \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة معاملاتها في حقل تبديلي K . تبين النظرية 16 من ف 19 أن مرتبة A هي أكبر عدد طبيعي r يسمح بإستخراج مصفوفة مربعة رتبتها r ،

تقبل القلب من المصفوفة A (نذكر أن قابلية القلب تعني أن المصفوفة المعتبرة ذات معين غير منعدم حسب النتيجة 1 من النظرية) . وبالتالي يتبين أن الشرط ج) الوارد في النظرية السابقة يعني أن المصفوفة (α_{ij}) من مرتبة p ، ولذا فتكافؤ هذا الشرط والشرط أ) يأتي من النظرية 15 في ف 19 .

تسمح طريقة البرهان هذه بحساب مرتبة مصفوفة (على حقل تبديلي) - وهي أهم فائدة لهذه الطريقة ويتم ذلك بدراسة المعينات التي يمكن استخراجها من المصفوفة ، وهو أمر مفيد للغاية من الناحية العملية .

من جهة ثانية ، نرى أنه لكي نعبّر على أن الأشعة $x_i = \sum \xi_{ij}\, a_j$ البالغ عددها p غير مستقلة ، يكفي أن نكتب $\binom{n}{p}$ علاقة «جبرية» تربط احداثياتها ، وهذه العلاقات هي :

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} \cdots \xi_{p,i_1} \\ \cdots\cdots \\ \xi_{1,i_p} \cdots \xi_{p,i_p} \end{vmatrix} = 0$$

مهما كانت العناصر $i_1 < \ldots < i_p$.

لكي نعبر مثلاً على أن ثلاثة أشعة :

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$
$$y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$$
$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$$

من $\mathbf{R}^4$ ، غير مستقلة أي مرتبطة فيما بينها بعلاقة غير تافهة ، نكتب :

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

9. شروط إنسجام جملة معادلات خطية.

تسمح نظرية المعينات بكتابة شروط انسجام جملة معادلات خطية (النظرية 5، ف 19) على شكل يسير، وذلك عندما يكون حقل الأساس K تبديلياً.

لتكن:

$$f_j(x) = \alpha_{1j}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{pj}\,\xi_p = \beta_j \qquad (1 \le j \le n) \tag{41}$$

جملة من n معادلة خطية و p مجهول، معاملاتها في K؛ نرمز بـ r لمرتبة الجملة أي (الفقرة 2، ف 20) مرتبة جماعة الأشكال الخطية $f_1, \dots, f_n$ على K^p، و r هو أيضاً مرتبة المصفوفة (α_{ij}) المكونة من المعاملات f_j. نستطيع حينئذ أن نستخرج من (α_{ij}) مصفوفة مربعة من الرتبة r، قابلة للقلب أي أن معينها غير منعدم؛ نفرض إذن فيما يلي أن:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{r1} \\ \dots\dots \\ \alpha_{1r} \dots \alpha_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{42}$$

بحيث أن $f_1, \dots, f_r$ مستقلة خطياً، أما $f_{r+1}, \dots, f_n$ فتكتب على شكل عبارات خطية لـ $f_1, \dots, f_r$.

نظرية 11 - مفرض أن العلاقة (42) محققة، عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي لكي تقبل جملة المعادلات الخطية (41) حلاً واحداً على الأقل هو أن يتحقق لدينا:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{r1}\ \beta_1 \\ \dots\dots \\ \alpha_{1r} \dots \alpha_{rr}\ \beta_r \\ \alpha_{1j} \dots \alpha_{rj}\ \beta_j \end{vmatrix} = 0$$

مهما كان العدد الطبيعي j بحيث $r + 1 \le j \le n$.

تبين النظرية 5 من ف 19 أنه لكي تقبل الجملة (41) حلاً يجب ويكفي أن يكون الأمر كذلك بالنسبة للجملة:

$$f_1(x) = \beta_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_r(x) = \beta_r$$

$$f_j(x) = \beta_j$$

مهما كان j بحيث $r + 1 \leq j \leq n$ ؛ ولذا نستطيع الإكتفاء بالبرهان على النظرية في الحالة الخاصة $n = r + 1$ ، لنفرض فيما يلي أننا في الحالة تلك.

إن كانت للجملة (41) حلول ، فإننا نحصل عليها بحل الجملة المؤلفة من المعادلات الأولى البالغ عددها r ، ولما كان الفرض (42) يثبت أن جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\,\xi_1 + \dots + a_{r1}\,\xi_r = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1r}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{rr}\,\xi_r = \beta_r \end{cases}$$

من نوع كرامر (النظرية 2 من ف 20 أو النتيجة 4 للنظرية 8 من هذا الفصل ، نرى أنه بالإمكان إعطاء قيم كيفية للمجاهيل $\xi_{r+1}, \dots, \xi_p$ الظاهرة في الجملة (41) [الفقرة 5 ، ف 20] ؛ بصفة خاصة إذا كانت الجملة (41) تقبل حلاً فهي تقبل حلاً تتحقق من أجله العلاقة :

$$\xi_{r+1} = \dots = \xi_p = 0$$

أما القضية العكسية فواضح أنها بديهية وتافهة. في حالة ما إذا كان $n = r + 1$ ، فإن الأمر يعود كله إذن إلى التعبير على أن الجملة :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{r1}\,\xi_r = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1,r+1}\,\xi_1 + \dots + \alpha_{r,r+1}\,\xi_r = \beta_{r+1} \end{cases} \qquad (43)$$

المؤلفة من $r + 1$ معادلة ومن r مجهول والتي مرتبتها تساوي r تقبل حلاً على الأقل ؛ وأن الأمر يكون كذلك إذا وفقط إذا تحقق :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{r1} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1\,r+1} & & \alpha_{r,r+1} & \beta_{r+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (44)$$

بهذا الخصوص نلاحظ أن العلاقة (44) تنص أيضاً على أن للجملة :

$$(45) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \dots + \alpha_{r1}\eta_r + \beta_1\eta_{r+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1,r+1}\eta_1 + \dots + \alpha_{r,r+1}\eta_r + \beta_{r+1}\eta_{r+1} = 0 \end{cases}$$

حلاً غير تافه (النتيجة 3 للنظرية 8) ؛ ولذا عدنا إلى إثبات تكافؤ وجود حل لِـ(43) ووجود حل غير تافه لِـ(45) وذلك بإفتراض (42) .

من الواضح في البداية أن وجود حل لِـ(43) يقتضي وجود حل غير تافه لِـ(45) لأنه إذا كان $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ حلاً لِـ(43) فإن $(\xi_1, \dots, \xi_r, -1)$ حل غير تافه لِـ(45) .

لرؤية القضية العكسية نعتبر حلاً غير تافه $(\eta_1, \dots, \eta_{r+1})$ لِـ(45) ؛ عندئذ نحصل على :

$$\eta_{r+1} \neq 0 \quad (46)$$

لأنه لو كان $\eta_{r+1} = 0$ لصار واضحاً أن $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ حلٌ غير تافه للجملة المتجانسة الملحقة بِـ(43) وبالتالي فهو حل للجملة :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \dots + \alpha_{r1}\eta_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1r}\eta_1 + \dots + \alpha_{rr}\eta_r = 0 \end{cases}$$

وهذا يتعارض مع الفرض (42) ومع النتيجة 3 من النظرية 8. بعد هذا، نلاحظ أن العلاقة (46) تسمح بقسمة العلاقات (45) على η_{r+1}، ومنه نرى أن العبارات :

$$\xi_i = -\eta i/\eta_{r+1} \qquad (1 \leq i \leq r)$$

تحقق (43)، وبذلك ينتهي البرهان .

مثال 4 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونعتبر جملة من ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 5y + 6z = b \\ 7x + 8y + 9z = c \end{cases}$$

معين هذه الجملة :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

منعدم وهذا واضح مباشرة، وعليه نرى أن الجملة المعتبرة ليست من نوع كرامر . لما كان

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

غير منعدم فإن الجملة من المرتبة $r = 2$؛ هناك شرط انسجام واحد، هو :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & b \\ 7 & 8 & c \end{vmatrix} = 0$$

وهذا الشرط يكتب بسهولة على النحو :

$$3(2b - a - c) = 0$$

أو على النحو(*) :

$$2b = a + c$$

كما أنه من الواضح أن :

$$(x + 2y + 3z) + (7x + 8y + 9z) = 2(4x + 5y + 6z)$$

كان بالإمكان توقع وجوب الشرط الذي حصلنا عليه، مسبقاً .

ملاحظة 6 – يجدر بالقارئ أن يقارن بين النظرية 11 والتمرين 23 من ف 19 .

(*) من فائدة القارئ الملم بمفهوم مميزة حقل (الفقرة 6، ف 30) أن يدرس الجملة المعتبرة دراسة كاملة في الحالة التي يكون فيها K تبديلياً كيفياً؛ من الواضح مثلا أن الطريقة المتبعة في النص تصبح غير صالحة إذا كانت المميزة تساوي 3.

ف 24. المعينات

1. الخاصيات الأساسية للمعينات.

لتكن :

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} - \xi_{n1} \\ \cdots\cdots \\ \xi_{1n} - \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة معاملاتها في حلقة تبديلية K ؛ كنا عرفنا معينها في الفقرة 5 من ف 23 على أنه العدد السلمي :

$$\text{dét}\,(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \mathcal{P}(\sigma)\, \xi_{1,\sigma(1)} \cdots \xi_{n,\sigma(n)}$$

لو ندخل، في المقياس K^n ، التماثل الداخلي u المعرف بمصفوفته X (بالنسبة للأساس القانوني لـ K^n) ، والأشعة :

$$x_i = u(e_i) = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in})$$

الممثلة بأعمدة المصفوفة X ، نحصل أيضاً على :

$$\text{dét}\,(X) = \text{dét}\,(u) = D(x_1, \ldots, x_n)$$

حيث يرمز $D(x_1, \ldots, x_n)$ لمعين الأشعة x_i بالنسبة للأساس القانوني $e_1, \ldots, e_n$ لـ K^n .

من ذلك ينتج أن معين X تابع متعدد الخطية متناوب لأعمدة X . كما نستخلص قواعد الحساب التالية؛ والهامة من الناحية العملية :

أ) إذا تساوى عمودان في معين فهو منعدم . لأن أي شكل متعدد الخطية متناوب ، ينعدم حتماً إذا كان شعاعان من بين الأشعة المتغيرة التي يحتوى عليها الشكل ، متساويين .

ب) إذا أجرينا تبديلاً σ لأعمدة معين نجد أن قيمة المعين المعتبر قد ضربت في إشارة σ؛ وبصفة خاصة نجد أن المعين قد ضرب في -1 إذا استبدلنا فيه عمودين فيما بينهما .

يرجع ذلك إلى المتطابقة :

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \mathcal{P}(\sigma)\, f(x_1, \dots, x_n)$$

الصالحة لكل تابع متعدد الخطية متناوب .

لدينا على سبيل المثال :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c' & a' & b' \\ c'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

ج) إذا ما ضربنا كل حدود عمود لمعين في نفس العدد السلمي λ فإن المعين المعتبر يضرب في λ.

د) نفرض أن حدود عمود i من المصفوفة X ، تكتب على الشكل :

$$\xi_{ij} = \xi'_{ij} + \xi''_{ij} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

ولتكن X' (X'' بالترتيب) المصفوفة المستخرجة من X بتعويض ξ'_{ij} (ξ''_{ij} بالترتيب) مكان ξ_{ij} من أجل $1 \leq j \leq n$ ؛ عندئذ :

$$\text{dét}\,(X) = \text{dét}\,(X') + \text{dét}\,(X'')$$

تعتبر الخاصيتان ج) وَ د) ترجمة للعلاقتين (3) وَ (4) الواردتين في ف 22 .

لدينا مثلاً :

$$\begin{vmatrix} a & u + 2v & c \\ a' & u' + 2v' & c' \\ a'' & u'' + 2v'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & u & c \\ a' & u' & c' \\ a'' & u'' & c'' \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & v & c \\ a & v' & c' \\ a & v' & c'' \end{vmatrix}$$

بدمج الخاصيات أ) ، ج) ، د) نحصل على :

ر) لا تتغير قيمة معين ما إذا أضفنا لعمود من أعمدته عبارة خطية كيفية لأعمدته الأخرى.

لنعتبر مثلاً المعين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ولنطرح العمود الثاني من الثالث ثم الأول من الثاني عندئذ نحصل على المعين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وهو منعدم لأن فيه عمودين متساويان.

هذا وتبين العلاقة :

$$\text{dét}\,({}^{t}X) = \text{dét}\,(X)$$

الواردة في النظرية 6 من ف 23، الخاصية التالية :

س) لا تتغير قيمة معين ما باستبدال سطوره بأعمدته. ومن ثم نستنتج أن كل معين تابعٌ متعدد الخطية متناوب لسطوره وكذا لأعمدته. وبالتالي :

ص) تبقى القواعد أ) حتى ر) الواردة أعلاه صالحة إذا ما استبدلنا فيها كلمة عمود بكلمة سطر.

2. النشر وفق عناصر سطر أو عمود.

ليكن X مقياساً على K ، يقبل أساساً من n عنصر : $(a_1, ..., a_n)$ ، وليكن f شكلاً $(n-1)$ الخطية متناوباً على X.

تبين النظرية 9 من ف 23 أن :

$$f(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_{n-1} \le n} \gamma_{i_1 ... i_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{1,i_1} - \xi_{n-1,i_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1,i_{n-1}} - \xi_{n-1,i_{n-1}} \end{vmatrix}$$

حيث :

$$\gamma_{i_1 ... i_{n-1}} = f(a_{i_1}, ..., a_{i_{n-1}}) \text{ وَ } x_i = \sum \xi_{ij} \, a_j$$

لكن الأعداد $i_1, ..., i_{n-1}$ البالغ عددها $n - 1$ ، مختلفة مثنى مثنى ومحصورة بين 1 وَ n وعليه فإن عدد المتتاليات $i_1 < ... < i_{n-1}$ الظاهرة في الدستور السابق يساوي n وهذه المتتاليات هي :

$$(2, ..., n), (1, 3, ..., n), ..., (1, ..., n - 1)$$

أي أنها المتتاليات من الشكل :

$$1, ..., j - 1, j + 1, ..., n$$

مع $1 \le j \le n$. وبالتالي يُكتب الدستور السابق أيضاً على النحو التالي :

$$f(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{1 \le j \le n} \gamma_j \cdot D_j(x_1, ..., x_{n-1}) \qquad (1)$$

حيث وضعنا :

$$D_j(x_1, ..., x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \xi_{11} - \xi_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1,j-1} - \xi_{n-1,j-1} \\ \xi_{1,j+1} - \xi_{n-1,j+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1n} - \xi_{n-1,n} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

وَ :

$$\gamma_j = f(a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n) \qquad (3)$$

نشير إلى أن العدد السلمي $D_j(x_1, ..., x_{n-1})$ يساوي معين المصفوفة التي نحصل عليها بحذف السطر j من المصفوفة :

$$
\begin{pmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1n} \cdots \xi_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{4}
$$

المكونة من مركبات الأشعة x_i .

بعد هذا الإثبات، نأخذ $X = K^n$ ونأخذ الأساس القانوني لـ K^n كأساس لـ X ونأخذ f العبارة:

$$
f(x_1, ..., x_{n-1}) = D(x_1,..., x_{i-1}, u, x_i, ..., x_{n-1}) \tag{5}
$$

حيث يرمز u لعنصر ثابت من K^n وحيث يرمز D للمعين بالنسبة للأساس القانوني: من الواضح أن f شكل $(n-1)$ الخطية متناوب على K^n ، ذلك لأن D شكل n الخطية متناوب

لنضع:

$$
u = \sum \alpha_j e_j
$$

عندئذ يأتي من الفقرة 1:

$$
f(x_1, ..., x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{i-1,1}\ \alpha_1\ \xi_{i1} \cdots \xi_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1n} \cdots \xi_{i-1,n}\ \alpha_n\ \xi_{in} \cdots \xi_{n-1,n} \end{vmatrix} \tag{6}
$$

من جهة أخرى نلاحظ أن العبارة (2) تساوي المعين من الرتبة $n-1$ المؤلف من الإحداثيات ذات الدليلات المخالفة لـ j ، للأشعة $x_1, ..., x_{n-1}$.

يبقى أن نحسب:

$$
\gamma_j = f(e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n)
$$

$$
= \begin{cases} D(e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_{i-1}, u, e_i, ..., e_n); j \leq i \\ D(e_1, ..., e_{i-1}, u, e_i, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n); j > i \end{cases}
$$

بما أن u يساوي مجموع الشعاع $\alpha_j e_j$ وعبارة خطية للأشعة:

$$
e_1, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n
$$

الظاهرة في المعين الذي نريد حسابه؛ فإن بالإمكان تعويض u بـ $\alpha_j e_j$ ؛ وبالتالي يأتي:

$$\gamma_j = \begin{cases} \alpha_j \cdot D(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{i-1}, e_j, e_i, \dots, e_n); j \leq i \\ \alpha_j \cdot D(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_i, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n); j > i \end{cases}$$

ومنه نحصل مباشرة على العلاقة :

$$\gamma_j = (-1)^{i+j} \alpha_j \cdot D(e_1, \dots, e_n) = (-1)^{i+j} \alpha_j$$

لننقل النتائج التي حصلنا عليها آنفاً إلى العلاقة (1)، تأتي حينئذ المتطابقة :

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} \alpha_j = \begin{vmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{n-1,1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1,j-1}, \cdots \xi_{n-1,j-1} \\ \xi_{1,j+1}, \cdots \xi_{n-1,j+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1,n} \cdots \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

بمقارنة هذه المتطابقة بـ(6) وبتبني رموز أكثر تناظراً نحصل على النتيجة الموالية :

نظرية 1 – لتكن $X = (\xi_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ مصفوفة مربعة من الرتبة n معاملاتها في حلقة تبديلية K . نرمز بـ X_{ij} للمصفوفة التي نحصل عليها بحذف العمود i والسطر j من X . لدينا عندئذ :

$$\text{dét}(X) = \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} \cdot \text{dét}(X_{ij}) \qquad (7)$$

مهما كان العدد الصحيح i المحصور بين $1 \leq i \leq n$.

لما كانت الأعداد السلمية $\text{dét}(X_{ij})$ مستقلة عن الحدود $\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}$ الواردة في العمود i من X ، فإن الدستور (7) يبين بوضوح (وهو أمر يأتي من تعريف الأشكال المتعددة الخطية، مباشرة) أن معين X تابع خطي للحدود الظاهرة في العمود i من X . من أجل ذلك نقول عن الدستور (7) إنه نشر $\text{dét}(X)$ وفق العمود $i^{\text{ème}}$ من X .

بما أن $\text{dét}\,({}^tX) = \text{dét}\,(X)$ فإن لدينا أيضاً الدستور :

$$\text{dét}\,(X) = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i+j}\ \xi_{ij} \cdot \text{dét}\,(X_{ij}) \qquad (8)$$

المسمى نشر $\text{dét}\,(X)$ وفق السطر j من X .

مثال 1 – لدينا المتطابقة :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \\ a''' & c''' & d''' \end{vmatrix} +$$

$$+ c \begin{vmatrix} a' & b' & d \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} a & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}$$

مثال 2 – لتكن X مصفوفة **مثلثية**، أي مصفوفة من الشكل :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \dots \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} \dots \alpha_{n2} \\ . & . & . \ . \ . \ . \ . \\ 0 & 0 & 0 \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

إذا نشرناها وفق عمودها الأول نجد :

$$\text{dét}\,(X) = \alpha_{11} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{32} \dots \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{33} \dots \alpha_{n3} \\ . & . \ . \ . \ . \\ 0 & 0 \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ومنه تأتي النتيجة التالية بالتدرج :

$$\text{dét}\,(X) = \alpha_{11}\,\alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن يساوي جداء الحدود القطرية في المصفوفة X .

إن الدستور السابق حالة خاصة من النتيجة الموالية : لتكن $n_1, ..., n_p$ أعداداً صحيحة موجبة تماماً ، نعتبر مصفوفة من الشكل :

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{p1} \\ 0 & A_{22} \dots A_{p2} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots A_{pp} \end{pmatrix}$$

حيث A_{ij} مصفوفة مؤلفة من n_i سطر ومن n_j عمود مهما كان i وَ j . لدينا في هذه الحالة :

$$\text{dét}(X) = \text{dét}(A_{11})\,\text{dét}(A_{22}) \dots \text{dét}(A_{pp})$$

لإثبات هذه النتيجة ، يكفي أن نتبع طريقة التدريج على p ، بإثباتها في حالة $p = 2$ ، أي أنه علينا أن نبين بأن :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \text{dét}(A) \cdot \text{dét}(D)$$

عندما تكون A مصفوفة مربعة من الرتبة p ، وَ D مصفوفة مربعة من الرتبة q . وَ B مصفوفة من p عمود و q سطر . من أجل ذلك نعتبر K^{p+q} والتماثل الداخلي u لِـ K^{p+q} الذي يمثل المصفوفة X بالنسبة للأساس القانوني $(e_1, ..., e_{p+q})$ ؛ ليكن E الفضاء الجزئي المولد عن $e_1, ..., e_p$ وَ F الفضاء الجزئي المولد عن $e_{p+1}, ..., e_q$ بحيث :

$$K^{p+q} = E \oplus F$$

أخيراً ليكن v التماثل الداخلي لِـ E الذي يقبل A مصفوفة له بالنسبة للأساس $(e_1, ..., e_p)$ لِـ E . وَ w التماثل الداخلي لِـ F الذي يقبل D مصفوفة له بالنسبة للأساس $(e_{p+1}, ..., e_{p+q})$ لِـ F ، وليكن $D(x_1, ..., x_{p+q})$ معين الأشعة المتغيرة $x_1, ..., x_{p+q}$ بالنسبة للأساس $e_1, ..., e_{p+q}$ لِـ K^{p+q} بحيث يكون :

$$\text{dét}(X) = D\big(u(e_1), ..., u(e_{p+q})\big)$$

نرى أن لدينا :

$$u(e_1) = v(e_1), \ldots, u(e_p) = v(e_p)$$

$$\text{dét}\,(X) = D\big(v(e_1), \ldots, v(e_p),\ b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}\big)$$

حيث نضع مؤقتاً :

$$b_{p+j} = u(e_{p+j})$$

لـكنه عندما تكون $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}$ معطاة، يتضح أن العبارة :

$$D(x_1, \ldots, x_p, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q})$$

حيث تتغير العناصر x_i في E، شكل p الخطية متناوب على E ؛ إذن لدينا (حسب الدستور (29) من الفقرة 5 في ف 23) :

$$D\big(v(e_1), \ldots, v(e_p), b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}\big) = \text{dét}\,(v) \cdot D\big(e_1, \ldots, e_p, b_{p+1}, \ldots\big)$$

ومنه يأتي :

$$\text{dét}\,(X) = \text{dét}\,(A) \cdot D\big(e_1, \ldots, e_p, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}\big)$$

لكن :

$$u(e_{p+1}) = w(e_{p+1}) + a_{p+1}, \ldots u(e_{p+q}) = w(e_{p+q}) + a_{p+q}$$

حيث تنتمي الأشعة a_{p+j} لـ E ؛ إذن :

$$\begin{aligned} D(e_1, \ldots, b_{p+q}) &= D\big(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}) + a_{p+1}, \ldots, w(e_{p+q}) + a_{p+q}\big) \\ &= D\big(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}), \ldots, w(e_{p+q})\big) \end{aligned}$$

ذلك لأن a_{p+j} المنتمية لـ E تكتب على شكل عبارات خطية لـ $e_1, \ldots, e_p$ (استعمل القاعدة (ر) الواردة في الفقرة 1، مثلاً) . من جهة أخرى نبين باتباع خطوات مماثلة للسابقة أن :

$$D\big(e_1, \ldots, e_p, w(e_{p+1}), \ldots, w(e_{p+q})\big) = \text{dét}\,(w) \cdot D(e_1, \ldots, e_{p+q})$$

وبما أن $\text{dét}(w) = \text{dét}(D)$ نحصل في النهاية على الدستور :

$$\text{dét}\,(X) = \text{dét}\,(A)\, \text{dét}\,(D)$$

وهو المطلوب .

3. المصفوفات المتممة .

لتكن :

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} \cdots \xi_{n1} \\ \cdots\cdots \\ \xi_{1n} \cdots \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة معاملاتها في حلقة تبديلية K . المتممة لِـ X هي تعريفاً المصفوفة :

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{11} \cdots \tilde{\xi}_{n1} \\ \cdots\cdots \\ \tilde{\xi}_{1n} \cdots \tilde{\xi}_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي لها حدود معطاة بالعلاقة :

$$\tilde{\xi}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{dét}\,(X_{ji}) \tag{9}$$

حيث ترمز X_{ij} للمصفوفة المستخرجة من X بحذف السطر i والعمود j ، كما سبق أن قلنا .

نظرية 2 – لتكن X مصفوفة مربعة من الرتبة n ، معاملاتها في حلقة تبديلية . لدينا :

$$\tilde{X} \cdot X = X \cdot \tilde{X}4 = \text{dét}\,(X) \cdot I_n$$

لكي نبين مثلاً أن : $\tilde{X} \cdot X = \text{dét}\,(X) \cdot I_n$ أي أن $\tilde{X} \cdot X$ هي المصفوفة القطرية التي لها حدود قطرية مساوية لِـ $\text{dét}\,(X)$ ، نثبت أن :

$$\sum_i \xi_{ij} \cdot \tilde{\xi}_{ki} = \begin{cases} \text{dét}\,(X) & ; \quad j = k \\ 0 & ; \quad j \neq k \end{cases} \tag{10}$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر يكتب على النحو :

$$\sum_i (-1)^{i+k}\, \xi_{ij}\, \text{dét}\,(X_{ik})$$

حسب الدستور (8) ، والعبارة الأخيرة تساوي المصفوفة التي نحصل عليها

بتعويض الحدود $\xi_{nk}, ..., \xi_{1k}$ المؤلفة للسطر K في X ، بالأعداد السلمية $\xi_{nj}, ..., \xi_{1j}$ ؛ إذا كان $j \neq K$ فإن المصفوفة التي نحصل عليها تتضمن سطرين متطابقين ولذا يكون معينها منعدماً؛ أما إذا كان $j = K$ فالمصفوفة هي X ؛ ومنه تأتي العلاقات (10) . من جهة أخرى نبرهن على الدستور $\tilde{X} \cdot X = \text{dét}(X) \cdot I_n$ بطريقة مماثلة إلّا أنه ينبغي في هذه الحالة استعمال (7) بدل (8) .

نتيجة 1 – لتكن X مصفوفة مربعة، معاملاتها في حلقة تبديلية K . لكي تكون X قابلة للقلب يجب ويكفي أن يكون معينها عنصراً قابلاً للقلب في K ؛ لدينا عندئذ:

$$X^{-1} = \text{dét}(X)^{-1} \cdot \tilde{X} \qquad (11)$$

إذا كانت X قابلة للقلب، تبين النظرية 7 من ف 24 أن:

$$\text{dét}(X \cdot X^{-1}) = \text{dét}(X)\,\text{dét}(X^{-1}) = \text{dét}(I_n) = 1$$

بحيث أن معين X يقبل القلب في K . لرؤية القضية العكسية نفرض أن هذا الشرط الأخير محقق عندئذ تثبت النظرية 2 أن المصفوفة:

$$\text{dét}(X)^{-1} \cdot \tilde{X}$$

تساوي مقلوبة المصفوفة X .

ملاحظة 1 – لقد سبق أن تناولنا حالة حقل تبديلي K في ف 23 (النتيجة 1 للنظرية 8) .

نتيجة 2 – ليكن X مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة تبديلية K ، وليكن $(a_1, ..., a_n)$ أساساً لـ X . لكي تشكل الأشعة $x_1, ..., x_n$ من X أساساً لـ X يجب ويكفي أن يكون معين هذه الأشعة بالنسبة للأساس $(a_1, ..., a_n)$ عنصراً يقبل القلب في K .

يجب أن نعبر على أن إحداثيات الأشعة x_i بالنسبة للأساس المعتبر تشكل مصفوفة قابلة للقلب في الحلقة $M_n(K)$.

مثال 3 - نأخذ $K = \mathbf{Z}$ وَ $X = \mathbf{Z}^n$ ، وليكن (a_i) الأساس القانوني ؛ نحصل عندئذ على النتيجة التالية : لكي تشكل أشعة :

$$x_i = (\xi_{j1}, \ldots, x_{in}) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

أساساً لِـ $\mathbf{Z}^n$ يجب ويكفي أن يكون :

$$\text{dét}\,((\xi_{ij})) = \pm 1$$

نرى أيضاً أن الزمرة $GL(n, \mathbf{Z})$ مكوّنة من المصفوفات المربعة من الرتبة n والتي تنتمي معاملاتها لِـ $\mathbf{Z}$ ، والتي معينها يساوي 1 + أو 1 - .

4. دساتير كرامر.

كنا قد رأينا أن حل جملة معادلات خطية ، معاملاتها في حقل K ، يرجع في كل الحالات إلى حل جملة من جمل كرامر ، أي جملة من الشكل :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{n1}\,\xi_n = \beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{nn}\,\xi_n = \beta_n \end{array} \right. \tag{12}$$

حيث المصفوفة :

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

مصفوفة تقبل القلب. أي أن معينها غير منعدم. لنضع :

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

حينئذ تكتب الجملة المعطاة على النحو :

$$Ax = b$$

وحلها هو :

$$x = A^{-1}\,b$$

تذكر بهذا الخصوص أننا أعطينا في الفقرة السابقة (النتيجة 1 للنظرية 2) دستوراً صريحاً لحساب مقلوب A ؛ ومنه تأتي العلاقة :

$$x = \text{dét}\,(A)^{-1} \cdot \tilde{A}\, b$$

لنكتب هذه العلاقة على شكل صريح ، عندها نجد :

$$\text{dét}\,(A) \cdot \xi_i = \sum_j (-1)^{i+j}\, \text{dét}\,(A_{ij})\, \beta_j$$

حيث ترمز A_{ij} للمصفوفة المستخرجة من A بحذف السطر j والعمود i . لكن النظرية 1 تبين أن الطرف الأيمن للعلاقة السابقة يساوي بالضبط معين المصفوفة التي نحصل عليها ، إنطلاقاً من A ، وبتعويض الحدود $\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in}$ الواردة في العمود i من A بالأطراف اليمنى : $\beta_1, ..., \beta_n$ الواردة في الجملة (12) . نرى إذن أن حل جملة كرامر (12) معطى بالدساتير :

$$\xi_i = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{i-1,1} & \beta_1 & \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{i-1,n} & \beta_n & \alpha_{i+1,n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}$$

تُعرف هذه الدساتير باسم دساتير كرامر .

مثال 4 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ، ونعتبر الجملة :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = a \\ 5x + 6y + 7z = b \\ 8x + 9y + 9z = c \end{cases}$$

ونحسب معينها :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

فنجد أن لدينا بالفعل جملة من جمل كرامر . أما المجهول x فهو معطى مثلاً بالعلاقة :

$$x = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ b & 6 & 7 \\ c & 9 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 6 & 1 \\ c & 9 & 0 \end{vmatrix} = -3a - c + 3b$$

بنفس الطريقة نحسب المجهولين الآخرين .

ملاحظة 2 - إذا كانت K حلقة تبديلية ، فإن دساتير كرامر تبقى صالحة بطبيعة الحال ، شرط أن يكون معين الجملة قابل للقلب في K .

ف 25. الفضاءات التآلفية .

1. الفضاء الشعاعي للانسحابات

نستعمل في هذه الفقرة الكلمات «فضاء» ، «نقطة» ، «شعاع» ، «تساير» ، «إنسحاب الخ . . . ؛ ونطلب من القارئ أن ينسب إليها المعنى المتعارف عليه في الهندسة الأولية . سوف لن نعطي لهذه الألفاظ تعاريف دقيقة ، ذلك أن مفهوماً كمفهوم «فضاء» مثلاً لا يعبر تماماً على كائن رياضي (حيث لا نستطيع وصفه بواسطة الرموز الأساسية لنظرية المجموعات) . إلاّ أنه يمكننا استخلاص خاصيات ، بطريقة شبه تجريبية ، ننطلق منها لإنشاء كائنات رياضية مماثلة ، كالفضاءات التآلفية مثلاً والتي سنعرفها في الفقرة الموالية .

لنرمز إذن بِـ E للفضاء المعتاد المكون من النقاط المعتادة ؛ أي أن هذه النقاط تمثل عناصر E . كنا رأينا (في المثال 2 ، ف 10) إننا إذا اخترنا نقطة O في E وثبتناها ، جاز لنا النظر إلى مجموعة الأشعة التي تبدأ من O في E كفضاء شعاعي حقيقي ، بعده يساوي 3 . لكن تعريف هذا الفضاء يتضمن عنصراً كيفياً غير دقيق - وهو اختيار النقطة O - لو نعوض O بنقطة أخرى O' ، نحصل على فضاء شعاعي جديد متشاكل مع الفضاء الشعاعي الأول لكنه غير مطابق له (نحصل على تشاكل قانوني من الفضاء الشعاعي الأول على الثاني بإلحاق كل شعاع نقطة بدئه O بالشعاع الذي نقطة بدئه O' والمساير للشعاع الأول) .

نبين الآن أننا نستطيع ، بتغيير هذا الإنشاء ، ربط الفضاء المعتاد بفضاء شعاعي قانوني ، أي بفضاء لا يتعلق تعريفه بأي اختيار كيفي .

من أجل ذلك نرمز بـT لمجموعة الإنساحابات في E : الإنسحاب هو تطبيق تقابلي من E في E يحول كل نقطة P من E إلى نقطة P' من E بحيث يكون الشعاع $\overrightarrow{PP'}$ مسايراً لشعاع معطى. سنبرهن على أنه بالإمكان تزويد المجموعة T ببنية فضاء شعاعي حقيقي.

لهذا الغرض، علينا أن نعرف المجموع $s+t$ حيث s وَ t انسحابان، والجداء λs حيث s انسحاب و λ عدد حقيقي. فيما يخص المجموع، نضع :

$$s + t = s \circ t$$

أي أن $s + t$ هو ما يسمى الهندسة الأولية انسحاب جداء s وَ t. أما λs فهو الإنسحاب الذي نحصل على شعاعه بضرب λ في شعاع الإنسجاب s.

نختار الآن نقطة O في E، ثم نلحق كل شعاع x نقطة بدئه O بالإنساحاب s_x المعرف بشعاعه x : إذن فمن أجل كل نقطة P من E، يكون الشعاع، الذي نقطة بدئه P ونقطة نهايته $s_x(P)$، مسايراً لِـx. بعد هذا، يتضح بمراعاة التعاريف السابقة أن لدينا :

$$s_x + s_y = s_{x+y} \quad ; \lambda \cdot s_x = s_{\lambda x} \qquad (1)$$

لما كانت مجموعة الأشعة التي نقطة بدئها O، تشكل فضاء شعاعياً حقيقياً عند تزويدها بالعمليتين الجبريتين المعروفتين فإن الخاصية نفسها تتمتع بها المجموعة T عند تزويدها بالعمليتين المعرفتين أعلاه ؛ والواقع هو أن التطبيق $x \to s_x$ تشاكل من الفضاء الأول على الثاني.

نقول عن T أنها **الفضاء الشعاعي للإنسحابات في الفضاء المعتاد**.

لتكن P نقطة من E وَs انسحاب ينتمي إلى T، نضع تعريفاً :

$$s + P = s(P)$$

وبذلك نحصل على تطبيق $(s, P) \to s + P$ من $T \times E$ في E، ومنه يتضح أن لدينا الخاصيات التالية :

1) لدينا العلاقة :

$$s + (t + P) = (s + t) + P$$

مهما كان s وَ t في T وَ P في E ؛

2) لدينا العلاقة :

$$O + P = P$$

مهما كان P في E (يرمز O في هذا الدستور إلى العنصر المحايد في T) ؛

3) مهما كان P وَ Q في E ، يوجد عنصر وحيد s في T بحيث :

$$s + P = Q$$

تعني الخاصية الأخيرة أنه يوجد دوماً انسحاب وحيد يحوّل نقطة معطاة إلى نقطة أخرى معطاة أيضاً ، وهي نتيجة معروفة .

عندما يكون :

$$s = P = Q$$

نكتب عادة ، تعريفاً ،

$$s = Q - P$$

إذن «الفرق» بين نقطتين P وَ Q يساوي الإنسحاب الذي يحوّل P إلى Q .

ملاحظة 1 - ينبغي أن ننتبه إلى أن تعريفنا لِـ «فرق» نقطتين ، والذي هو انسحاب و ليس نقطة ولا شعاعاً ، لا يخوّل لنا تعريف «مجموع» نقطتين ؛ ذلك أنه ليس لعملية الجمع هذه معنى هندسياً أو فيزيائياً .

2. الفضاءات التآلفية الملحقة بفضاء شعاعي

ليكن T فضاء شعاعياً على حلقة K ؛ يسمى **فضاء تآلفياً ملحقاً** بِـ T كل كائن مشكل من مجموعة E ومن تطبيق لِـ $T \times E$ في E نرمز له بِـ :

$$(s, P) \rightarrow s + P$$

بحيث تكون الخاصيات (1)، (2)، (3) الواردة في الفقرة السابقة متوفرة فيه، بعد هذا نعرف **النقاط** على أنها عناصر E، كما أن كل عنصر s من T يسمح بتعريف تطبيق من E في E، وهذا التطبيق الذي نرمز له بـ$\overline{s}$، معطى بـ:

$$\overline{s}(P) = s + P$$

مهما كان P في E.

إن هذه التطبيقات تقابلية وتسمى **انسحابات في** E.

مثال 1 - ليكن T فضاء شعاعياً على حقل K. نستطيع حينئذ النظر إلى T نفسه كفضاء تآلفي ملحق بـT، ذلك أن الجمع في T تطبيق من $T \times T$ في T يحقق الخاصيات (1)، (2)، (3) الواردة في الفقرة السابقة - تنص هذه الخاصيات، وفي هذه الحالة بالذات، أن T زمرة عند تزويدها بقانون الجمع، لا أكثر.

مثال 2 - لتكن X مجموعة وَ A جزء منها، و u تطبيقاً معطى من X في حقل K. نرمز بـT للفضاء الشعاعي على K المكون من التطبيقات s من X في K بحيث $s(a) = 0$ مهما كان a في A، كما نرمز بـE لمجموعة التطبيقات f من X في K بحيث $f(a) = u(a)$ مهما كان a في A (أي أن E هي مجموعة امتدادات u على X). إذا كان s في T وَ f في E نعرف $s + f$ مثل التابع $s(x) + f(x)$؛ عندئذ تكون شروط الفقرة الأولى محققة وهو الأمر الذي يسمح لنا بالنظر إلى E كفضاء تآلفي ملحق بـT.

يستطيع القارئ أن يتأكد من أن المثال السابق حالة خاصة من المثال الموالي:

مثال 3 - ليكن M فضاء شعاعياً على K، وليكن T فضاء شعاعياً جزئياً من M. لما كانت T زمرة جزئية من الزمرة الجمعية M، يمكن اعتبار الصفوف وفق T في M (الفقرة 6، ف 7)؛ من أجل كل a في M نرمز بـ: $T + a$ لصف a وفق T: فهو إذن جزء من M؛ إنه مجموعة العناصر x من M بحيث $x - a$ ينتمي إلى T.

ليكن E صفاً وفق T من تلك الصفوف ؛ إنه ليس فضاء شعاعياً جزئياً من M عموماً ؛ لكن إذا كان s في T وَ u في E ، فمن الواضح أن الشعاع المجموع $s + u$ ينتمي أيضاً إلى E ؛ وبذلك نكون قد عرفنا تطبيقاً من $T \times E$ في E ، وهو التطبيق الذي يسمح بالنظر لِـ E كفضاء تآلفي ملحق بِـ T كما هو واضح.

مثال 4 - نأخذ E وَ T مثلما عرفناهما في الفقرة 1 (الفضاء المعتاد والفضاء الشعاعي المعتاد للإنسحابات). ليكن E' مستوياً (مستقيماً بالترتيب) في E ، ولتكن T' (المحتوية في T) مجموعة الإنسحابات ذات الشعاع الموازي لِـ E' أي مجموعة الإنساحابات التي تطبق E' في E'.

من الواضح أن T' فضاء شعاعي جزئي من T ، وبما أن $s + P$ ينتمي إلى E' من أجل s في T' وَ P في E' ، فإننا نستطيع تعريف تطبيق من $T' \times E'$ في E' بطريقة قانونية. ويسمح لنا ذلك، كما هو واضح، باعتبار E' كفضاء تآلفي ملحق بِـ T'.

ليكن T فضاء شعاعياً على K وَ E فضاء تآلفياً. نختار نقطة O في E ؛ سنرى أنه يمكن لنا النظر لِـ E كفضاء شعاعي على K (لكن بنية الفضاء الشعاعي على K التي نحصل عليها بهذه الطريقة مرتبطة باختيار النقطة O أي أنها سوف لن تكون قانونية). من أجل هذا، نعتبر نقطتين P وَ Q من E ونضع $P + Q = R$ حيث يرمز R للنقطة التي تحقق:

$$R - O = (P - O) + (Q - O) \tag{2}$$

(ومعنى هذا أن الانسحاب الذي يحوّل O إلى R ، مركب من الانسحاب الذي يحوّل O إلى P والانسحاب الذي يحوّل O إلى Q) ؛ إذا كانت P نقطة معطاة من P وَ λ عدداً سلمياً من K فإن النقطة $P' = \lambda P$ معرفة بالعلاقة:

$$P' - O = \lambda \cdot (P - O) \tag{3}$$

سنبين أن E فضاء شعاعي متشاكل مع T ، عند تزويده بهذين العمليتين.

لذلك نعتبر التطبيق $f: T \to E$ المعطى بِـ:

$$f(s) = s + O$$

إنه تطبيق تقابلي حسب الخاصية (3) الواردة في الفقرة 1. ليكن s وَ t عنصرين من T ، نضع $P = f(s)$ وَ $Q = f(t)$ ونبحث عن النقطة $R = P + Q$ المعطاة بـ(2)؛ لدينا $P = s + O$ ، إذن $P - O = s$ ، كما أن $Q - O = t$ بحيث نرى ، بالإستناد إلى (2)، أن $R - O = s + t$ ، لكن معنى ذلك هو أن $R = f(s + t)$ وعليه :

$$f(s + t) = f(s) + f(t)$$

كما نرى بالإستناد إلى (3) أن :

$$f(\lambda s) = \lambda f(s)$$

بعد هذا ، وبما أن مسلمات الفضاءات الشعاعية محققة في T ، ونظراً إلى أن f ، تقابل من T على E ، يتضح أن مسلمات الفضاءات الشعاعية محققة في E وأن f تشاكل فضاءين شعاعيين.

سنرمز للفضاء الشعاعي الذي نحصل عليه بتزويد E بقانوني التركيب (2) وَ (3)، بـ: E_O .

مثال 5 – نأخذ E وَ T مثلما عرفناهما في الفقرة 1؛ نختار نقطة «مصدر» O . عندئذ نعرف المجموع $P + Q = R$ في E بالشرط الذي ينص على أن الشعاع OR يساوي مجموع الشعاعين OP وَ OQ ، كما نعرف النقطة $\lambda P = P'$ بالشرط القائل أن الشعاع OP' يساوي الشعاع OP مضروباً في λ (أي أن P' هي صورة P بواسطة التحاكي المعرف بمركزه O وبنسبته λ) .

3. مراكز الأبعاد المتناسبة في فضاء تآلفي.

نحتفظ بفروض ورموز الفقرة 2، ندرس فيما يلي كيف تتعلق بنية فضاء شعاعي معرفة على E بواسطة إختيار نقطة «مصدر» O ، باختيار هذه النقطة.

من أجل ذلك نعتبر نقاطاً $P_1, ..., P_n$ تنتمي إلى E وأعداداً سلمية $\lambda_1, ..., \lambda_n$ في K ؛ بعد إختيار نقطة O في E نستطيع أن نعرف في الفضاء الشعاعي E_O العبارة الخطية :

$$P = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n$$

بمراعاة العلاقتين (2) وَ (3) نحصل على :

$$P - O = \lambda_1(P_1 - O) + ... + \lambda_n(P_n - O) \tag{4}$$

وهي علاقة خطية بين عناصر الفضاء الشعاعي T .

إذا عوضنا O بنقطة أخرى O' وجدنا أن النقطة P تعوض بنقطة P' معطاة بِـ :

$$P' - O' = \lambda_1(P_1 - O') + ... + \lambda_n(P_n - O') \tag{5}$$

من جهة أخرى إذا كانت A ، B ، C نقاطاً معطاة من E ، فإن لدينا ، بصفة عامة ، العلاقة :

$$A - C = (A - B) + (B - C) \tag{6}$$

لأننا إذا وضعنا $s = A - B$ وَ $t = B - C$ نجد $A = s + B$ وَ $B = t + C$ ، إذن $A = s + (t + C)$ وبالتالي :

$A = (s + t) + C$ حسب الخاصية (1) الواردة في الفقرة 1 ، ومنه يأتي : $A - C = s + t$ كما أعلنا ذلك . بعد هذا نلاحظ أن :

$$P_i - O' = (P_i - O) + (O - O')$$

ولذا نستطيع كتابة (5) على الشكل :

$$\begin{aligned} P' - O' &= \lambda_1[(P_1 - O) + (O - O')] + ... + \lambda_n[(P_n - O) + (O - O')] \\ &= \lambda_1(P_1 - O) + ... + \lambda_n (P_n - O) + (\lambda_1 + ... + \lambda_n)(O - O') \\ &= P - O + (\lambda_1 + ... + \lambda_n) \cdot (O - O') \end{aligned}$$

لما كان $P' - O' = (P' - O) + (O - O')$ فإن العلاقة السابقة تكتب أيضاً على النحو :

$$P' - O = P - O + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n - 1) \cdot (O - O')$$

وبما أن $P' - O = (P' - P) + (P - O)$ فإن لدينا في النهاية العلاقة التالية :

$$P' - P = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n - 1) \cdot (O - O') \qquad (7)$$

يأتي مما سبق أن لدينا بصفة عامة : $P \neq P'$ ، أي أن بنية الفضاء الشعاعي لِـ E تتعلق بالفعل بإختيار نقطة البدء O في E .

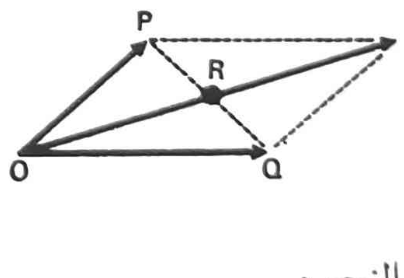
نشير إلى أن لدينا $P = P'$ بمجرد أن تكون :

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \qquad (8)$$

أي أنه إذا تحقق هذا الشرط فالنقطة $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$ التي كانت معرفة في البداية إنطلاقاً من اختيار نقطة بدء O في E ، أصبحت الآن غير متعلقة باختيار O ، وبالتالي فإن لديها معنى «مستقل» أو «قانوني» . نقول عن هذه النقطة إنها **مركز الأبعاد المتناسبة (أو مركز الثقل) للنقاط** $P_1, \ldots, P_n$ **فالمرفقة بالكتل** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

مثال 6 - نعتبر E وَ T المعرفين في الفقرة 1 . ولتكن P وَ Q نقطتبين معلومتين ، نستطيع أن نعرف النقطة :

$$R = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$$



والتي نكتبها عادة على النحو :

$$\frac{P + Q}{2}$$

إنها معطاة بالعلاقة :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

حيث يرمز O لنقطة كيفية من E . لما كان المجموع $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ معطى بـ «قاعدة متوازي الأضلاع» فمن الواضح أن النقطة R تمثل منتصف قطعة المستقيم التي تصل P بـ Q .

لنعتبر بصفة عامة النقطة :

$$R = tP + (1 - t)Q$$

حيث يرمز t لعدد حقيقي كيفي؛ وهي نقطة معطاة بالعلاقة :

$$\overrightarrow{OR} = t \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - t) \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + t(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})$$

يمثل $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ الشعاع الذي يبدأ من O والمساير للشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ؛ نستنتج مباشرة بدراسة الرسم الوارد أعلاه، أن النقطة R توجد على المستقيم الذي يمر بـ P وَ Q - كما نلاحظ أن هذا المستقيم عبارة عن مجموعة النقاط التي تكتب على النحو : $tP + (1 - t)Q$ حيث t ينتمي إلى $\mathbf{R}$.

مثال 7 - نعتبر E وَ T المعرفين في الفقرة 1، ونعتبر كذلك ثلاث نقاط P ، Q ، R ؛ بإمكاننا تعريف النقطة :

$$M = uP + vQ + wR \tag{9}$$

شريطة أن يكون $u + v + w = 1$.

إذا كانت O نقطة كيفية، نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= u \cdot \overrightarrow{OP} + v \cdot \overrightarrow{OQ} + w \cdot \overrightarrow{OR} \\ &= u \cdot \overrightarrow{OP} + v \cdot \overrightarrow{OQ} + (1 - u - v) \cdot \overrightarrow{OR} \\ &= \overrightarrow{OR} + u \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) + v \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR})\end{aligned}$$

لكن $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OR}$ مساير لـ $\overrightarrow{RM}$ ، وَ $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$ مساير لـ $\overrightarrow{RP}$ ، وَ $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$ مساير لـ $\overrightarrow{RQ}$ ؛ وبالتالي نرى أن الشعاع $\overrightarrow{RM}$ عبارة خطية للشعاعين $\overrightarrow{RP}$ وَ $\overrightarrow{RQ}$ ، ولدينا على وجه التحديد :

$$\overrightarrow{RM} = u \cdot \overrightarrow{RP} + v \cdot \overrightarrow{RQ}$$

ومنه نستنتج أن M تقع في المستوى المعين بالثلاث نقاط P ، Q ، R (وذلك عندما نفرض أن تلك النقاط لا تقع على مستقيم واحد) . بخصوص القضية العكسية ، من الواضح أننا نستطيع كتابة كل نقطة M من هذا المستوى على الشكل (9) شريطة أن نحسن إختيار u وَ v .

بصفة خاصة ، إذا أخذنا $u = v = w = \frac{1}{3}$ ، فإن النقطة M التي نحصل عليها معطاة بالعلاقة :

$$RM = \frac{1}{3}(RP + RQ) = \frac{2}{3} \cdot \frac{RP + RQ}{2}$$

وما هي إذن سوى مركز ثقل المثلث PQR بالمعنى المعتاد .

نحتاج في أغلب الأحيان ، عند حساب مركز الأبعاد المتناسبة في فضاء تآلفي ، إلى دستور التوزيع التالي :

$$\sum_i \mu_i \sum_j \lambda_{ij} \cdot P_{ij} = \sum_{i,j} \mu_i \lambda_{ij} \cdot P_{ij} \qquad (10)$$

وهو دستور يظل صالحاً ما دام له معنى ، أي ما دامت العلاقات :

$$\sum_j \lambda_{ij} = 1 \qquad (\text{مهما كان } i)$$

$$\sum_i \mu_i = 1$$

محققة . (نلاحظ أن هذه العلاقات تقتضي .

$$\sum_{i,j} \mu_i \lambda_{ij} = 1$$

بحيث نتأكد أن للطرف الأيمن من (10) معنى متى كانت العلاقات السابقة محققة) . لإثبات (10) يكفي أن نبين أنه إذا كانت O نقطة من E فيجب أن يكون :

$$\sum_{i} \mu_i \left(\sum_{j} \lambda_{ij} \cdot P_{ij} - O \right) = \sum_{i,j} \mu_i \lambda_{ij} (P_{ij} - O)$$

لكن لدينا تعريفاً:

$$\sum_{j} \lambda_{ij} \cdot P_{ij} - O = \sum_{j} \lambda_{ij} (P_{ij} - O)$$

ولذا ترجع العلاقة التي نريد إثباتها إلى خاصيات التوزيع في الفضاء الشعاعي T .

4. المنوعات الخطية في فضاء تآلفي.

نستطيع تعميم مفهومي «المستقيم» و «المستوي» الواردين في الهندسة الأولية بالطريقة التالية. ليكن T فضاء شعاعياً على حقل K ، و E فضاء تآلفياً ملحقاً بـ T ، و V جزء من E . نقول عن V إنه **منوّعة خطية في** E إذا كان:

$$\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n \in V$$

مهما كانت النقاط $P_1, ..., P_n$ في V والأعداد السلمية $\lambda_1, ..., \lambda_n$ في K بحيث:

$$\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$$

مثال 8 – إن المجموعة الخالية منوعة خطية.

مثال 9 – مهما كانت النقطة P في E فإن المجموعة التي تتكون من العنصر P منوعة خطية ، ذلك أن:

$$\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = P$$

إذا كان $P_1 = P_2 = ... = P_n = P$.

أما من الناحية العملية فنحن لا نفرق بين النقطة P والمنوعة الخطية $\{P\}$.

مثال 10 - لتكن $P_1, \ldots, P_n$ نقاطاً معطاة في E . إن المجموعة V المُكونة من العناصر P المنتمية لِـ E التي نستطيع كتابتها على الشكل :

$$P = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ أعداد سلمية تحقق المساواة $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ ، منوعة خطية .

لتوضيح ذلك نعتبر النقاط :

$$Q_j = \sum_i \lambda_{ij} P_i$$

حيث $\sum_i \lambda_{ij} = 1$ ، التي تنتمي إلى V ؛ كما نعتبر أعداداً سلمية μ_j مجموعها يساوي 1 ، لدينا حسب (10) :

$$\sum_j \mu_j Q_j = \sum_j \mu_j \sum_i \lambda_{ij} P_i = \sum_{i,j} \mu_j \lambda_{ij} P_i = \sum_i \nu_i P_i$$

حيث :

$$\nu_i = \sum_j \mu_j \lambda_{ij}$$

وهو ما يبين أن V يحقق تعريف المنوعة الخطية .

نلاحظ أن V يحتوي على النقاط المعطاة P_i (إننا نحصل على العلاقة $P_1 \in V$ مثلاً بأخذ $\lambda_1 = 1$ وَ : $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$) وأن كل منوعة خطية تحتوي على النقاط P_i تحتوي تعريفاً على V . ولذلك فإن V هي أصغر المنوعات الخطية التي تحتوي على النقاط P_i . نقول عن V إنها **المنوعات الخطية المولدة عن النقاط** $P_1, \ldots, P_n$.

مثال 11 - لتكن P و Q نقطتين من E ؛ تتألف المنوعة الخطية المولدة عن P وَ Q ، من النقاط : $\lambda P + (1 - \lambda) Q$ حيث λ عنصر كيفي من K . إذا كان $P = Q$ فهذه المنوعة تنحصر في النقطة P . أما إذا كان $P \neq Q$ فتسمى **المستقيم الواصل** P بِـ Q . نجد تبريراً لهذا المصطلح في المثال 6 .

نشير إلى أنه إذا كان K هو حقل الأعداد الطبيعية وفق 2 ، وهو الحقل

الذي يتكون من العنصرين 0 وَ 1، فإن المستقيم الواصل P بِـQ هو المجموعة $\{P, Q\}$. إن هذا الأمر، الذي يبدو غريبا للقارئ المبتدئ، يعقد مفاهيم الهندسة ونتائجها على هذا الحقل (والأمر كذلك عموماً، على كل حقل مميزته تساوي 2؛ أي كل حقل يكون فيه: $1 + 1 = 0$ حيث يرمز 0 للعنصر المحايد وَ 1 لعنصر الوحدة أنظر ف 30، الفقرة 6).

نظرية 1 - ليكن T فضاء شعاعياً على حقل K، و E فضاء تآلفياً ملحقاً بِـT، وَ V جزء غير خال من E. إن الخاصيات التالية متكافئة:

أ) V منوعة خطية.

ب) من أجل كل نقطة P_0 من V، تكوّن الأشعة $P - P_0$ (حيث $P \in V$) فضاء شعاعياً جزئياً من T.

ج) توجد نقطة P_0 من V بحيث تكون مجموعة الأشعة $P - P_0$ (حيث $P \in V$) فضاء شعاعياً جزئياً من T.

إذا كانت هذه الشروط المتكافئة محققة فإن الفضاء الشعاعي الجزئي من T المكوّن من الأشعة ذات الشكل: $P - P_0$ (حيث P_0 نقطة معطاة وَ P نقطة متغيرة في V) فضاء مستقل عن اختيار P_0 في V؛ وهو عبارة عن مجموعة العناصر s المنتمية لِـT والتي تحقق:

$$s + P \in V$$

مهما كان P في V.

لنبدأ بالبرهان على أن أ) يستلزم ب)؛ يكفي أن نثبت بأن مهما كان Q وَ R وَ V وَ λ وَ μ في K، يوجد عنصر S في V بحيث:

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0)$$

لكن النقطة S المعرفة بهذه العلاقة تحقق أيضاً:

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0) + (1 - \lambda - \mu)(P_0 - P_0)$$

ومنه يأتي:

$$S = \lambda Q + \mu R + (1 - \lambda - \mu) P_0$$

وهو ما يبين أن S ينتمي إلى V . عندما تكون V منوعة خطية .

أما الاستلزام ب) ⇐ ج) فهو بديهي ، لنبين إذن أن ج) يستوجب أ) .
من أجل ذلك نعتبر النقطة

$$P = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i P_i$$

حيث $\sum \lambda_i = 1$.

علينا أن نبين بأن P ينتمي إلى V عندما يحتوي V على النقاط $P_1, ..., P_n$. بهذا الصدد نلاحظ أن :

$$P - P_0 = \sum \lambda_i (P_i - P_0)$$

إذا إحتوى V على العناصر P_i يبين الفرض ج) إذن بأن : $P - P_0 = P' - P_0$ من أجل نقطة P' من V ، وهو ما يقتضي ، وضوحاً ، $P = P'$ وبالتالي فإن P ينتمي إلى V كما سبق أن أعلنا .

نبين الآن أنه إذا كانت V منوعة خطية غير خالية فإن الفضاء الجزئي من T المكون من الأشعة $P - P_0$ $(P \in V)$ لا يتعلق باختيار النقطة P_0 في V .

ليكن H_0 الفضاء الشعاعي الجزئي الملحق بـP_0 ، وليكن H_1 الفضاء الجزئي الذي نحصل عليه بواسطة إختيار آخر P_1 في V ؛ لدينا العلاقة التالية من أجل كل P في V :

$$P - P_0 = (P - P_1) + (P_1 - P_0) = (P - P_1) - (P_0 - P_1)$$

لما كان H_1 يحتوي ، تعريفاً ، على $P - P_1$ وَ $P_0 - P_1$ ، فإن $P - P_0$ ينتمي إلى H_1 ؛ ومنه يأتي $H_0 \subset H_1$ ، إذن $H_0 = H_1$ بالتناظر .

نرى إذن أن الفضاء الشعاعي الجزئي المكوّن من الأشعة $P - P_0$ $(P \in V)$ مستقل عن اختيار P_0 في V ؛ لنرمز له بـH . من الواضح أيضاً أنه يساوي مجموعة الأشعة ذات الشكل $P - Q$ حيث P وَ Q في V . ليكن s

في H وَ P في V ؛ نرى باختيار $P_0 = P$ أنه يوجد Q في V بحيث $s = Q - P$ ؛ لدينا إذن $Q = s + P$ وهو ما يبين أن $s + P$ ينتمي إلى V مهما كان s في H وَ P في V.

للنظر في القضية العكسية نعتبر عنصراً s في T يحقق هذا الشرط الأخير؛ ثم نختار نقطة P في V ونضع: $s + P = Q$، لدينا من جهة $Q \in V$ ومن جهة أخرى: $s = Q - P$، وبالتالي $S \in H$. وبه ينتهي البرهان.

لتكن V منوعة خطية غير خالية معطاة في E، يسمى الفضاء الجزئي H من T المؤلف من الأشعة ذات الشكل: $Q - P$، حيث P وَ Q في V، **الفضاء الجزئي التوجيهي لِـ V**.

إن معرفة H لا تكفي لتعيين V ؛ لكن إذا كان كل من V' وَ V'' منوعة خطية ولهما نفس الفضاء الجزئي التوجيهي H، فإنه يوجد في E انسحاب يطبق V' على V''. لرؤية ذلك نختار نقطة P' في V' ونقطة P'' في V'' ونعتبر الشعاع $a = P'' - P'$. حتى تكون نقطة P منتمية لِـ V' يجب ويكفي أن ينتمي $P - P'$ لِـ H ؛ وبما أن:

$$P - P' = (P + a) - P''$$

ونظراً لأن H يمثل أيضاً الفضاء الجزئي التوجيهي لِـ V''، نرى أن العلاقتين $P \in V'$ وَ $P + a \in V''$ متكافئتان أي أن الإنسحاب $P \rightarrow P + a$ يطبق لـ V' على V''.

مثال 12 - ليكن T فضاء شعاعياً على K ونأخذ E المجموعة T نفسها مثلما حدث في المثال 1 أعلاه. لتكن V منوعة خطية و H الفضاء الجزئي التوجيه لِـ V ؛ إذا كان $P_0 \in V$ نرى أن V تمثل مجموعة الأشعة (لا نفرق هنا بين النقاط والأشعة) ذات الشكل $P_0 + P$ حيث P عنصر يرسم H، أي أن V عبارة عن صف P_0 وفق H بالمعنى الوارد في الفقرة 6 من ف 7 وذلك باعتبار الزمرة الجمعية T.

وبما أن هناك من بين المؤلفين من يطلق اسم منوعة خطية على ما نسميه

نحن فضاء شعاعياً جزئياً، فإنه من المفيد في الحالة التي يُنظر فيها لفضاء شعاعي كفضاء تآلفي، أن نسمي **منوعة خطية تآلفية** ما يجب أن نسميه منوعة خطية. وبالتالي فإن المنوعة، الخطية التآلفية، في فضاء شعاعي T، هي اما المجموعة الخالية أو صف وفق فضاء شعاعي جزئي من T.

ملاحظة 2 - لتكن V منوعة خطية غير خالية في فضاء تآلفي E ملحق بفضاء شعاعي T، وليكن $H \subset T$ الفضاء الجزئي التوجيهي لِـV. لدينا $s + P \in V$ من أجل كل s في H وَ P في V؛ ومنه نستنتج تطبيقاً: $(s, P) \to s + P$ من $H \times V$ في V؛ يحقق هذا التطبيق الخاصيات الثلاث (1)، (2)، (3) للفضاءات التآلفية الواردة في الفقرة الأولى كما نرى ذلك بسهولة. وبالتالي يمكننا اعتبار V كفضاء تآلفي ملحق بِـH، ثم نطبق على V كل تعريف الفضاءات التآلفية. على سبيل المثال، إذا كانت P_i نقاطاً من V وَ λ_i أعداداً سلمية من K مجموعها 1، نستطيع أن نعرف في الفضاء التآلفي V مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط P_i الملحقة بالكتل λ_i؛ من الواضح أن النقطة المنتمية لِـV التي نحصل عليها بهذه الطريقة هي نفس النقطة التي نحصل عليها باعتبار الفضاء التآلفي E.

ملاحظة 3 - نفرض أن V هي المنوعة الخطية المولدة عن النقاط $P_0, ..., P_n$ المنتمية لِـE؛ إن الفضاء الجزئي التوجيهي H هي مجموعة الأشعة ذات الشكل $P - M$ حيث يتغير P في V وحيث يمثل M نقطة مختارة ومثبتة في V. لكننا نلاحظ أن عناصر V هي النقاط:

$$P = \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_i P_i$$

حيث $\sum_{0 \leq i \leq n} \xi_i = 1$

بالاستناد إلى العلاقة (4) أعلاه نتأكد أن هذه النقاط تحقق:

$$P - M = \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_i (P_i - M)$$

لنأخذ كحالة خاصة $M = P_0$ ؛ نرى عندئذ أن H هي مجموعة الأشعة :

$$\xi_1(P_1 - P_0) + \dots + \xi_n(P_n - P_0)$$

حيث $\xi_1, \dots, \xi_n$ أعداد سلمية كيفية (لأن العلاقة :

$$\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n = 1$$

تسمح بطبيعة الحال باختيار n عدد سلمي من بين $\xi_0, \dots, \xi_n$ البالغ عددها $n + 1$، وذلك بطريقة كيفية) . أي أن H هو الفضاء الشعاعي الجزئي من T المولد عن الأشعة :

$$P_i - P_0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

ملاحظة 4 - ليكن E فضاء تآلفياً . كنا قد رأينا في الفقرة 2 إنه إذا اخترنا في E نقطة «مصدر» O ، نستطيع النظر لِـ E على أنه فضاء شعاعي عنصره المحايد O ، وذلك بتعريف المجموع $P + Q = R$ لعنصرين من E بالعلاقة التالية مثلاً :

$$R - O = (P - O) + (Q - O)$$

نرمز بِـ E_0 للفضاء الشعاعي الذي نحصل عليه بعده الطريقة . ليكن V جزء غير خال من E ، ثم نأخذ نقطة من V لتلعب دور O ؛ عندئذ يكون V منوعة خطية في E إذا وفقط إذا كان V فضاء شعاعياً جزئياً من E_0 . نترك للقارئ مهمة إثبات ذلك على شكل تمرين .

5. توليد منوعة خطية بمستقيمات .

يُعرف المستوى في الهندسة الأولية بالشرط القائل أنه إذا إحتوى مستو على نقطتين فهو يحتوي أيضاً على المستقيم الذي يصل النقطتين . وبما أننا تبنينا تعريفاً آخر للمنوعة الخطية (وبصفة خاصة المستويات) يحق لنا أن

نفكر، على ضوء ما تبنيناه هنا، في أن يُصبح «التعريف» الأولي نظرية (وهو ما يقابل في الهندسة الأولية، كوّن تعريفاً للمستويات يعتبر في الحقيقية نظرية...) . ذلك ما سيحدث بالفعل شريطة ألاّ تكون مميزة حقل الأساس K تساوي 2 (أي شريطة ألاّ يكون $1 + 1 = 0$ في K) :

نظرية 2 - ليكن T فضاء شعاعياً على حقل K مميزته تخالف 2، وليكن E فضاء تآلفياً ملحقاً بـT وَV جزء من E. حتى يكون V منوعة خطية يجب ويكفي أن يكون المستقيم الواصل P بـQ محتوياً في V، مهما كانت النقطتان P وَQ في V بحيث $P \neq Q$.

للبرهان على ذلك نفرض أن V منوعة خطية. إذا إحتوت V على نقطتين مختلفتين P وَQ، فإنها تحتوي أيضاً على المنوعة الخطية المولدة عن P وَQ (المثال 10)، أي أنها تحتوي على المستقيم الواصل بين P وَQ.

لرؤية القضية العكسية نفرض أن الشرط الأخير محقق. بما أن المجموعة الخالية منوعة خطية، نستطيع أن نفرض بأن V ليس خالياً؛ لنختر نقطة P_0 في V، يرجع الأمر حينئذ (النظرية 1) إلى البرهان على أن مجموعة الأشعة $Q - P_0$، من أجل Q في V، فضاء شعاعي جزئي من T؛ أي أنه مهما كان λ وَμ في K وَQ وَR في V فإنه يوجد S في V بحيث:

$$S - P_0 = \lambda(Q - P_0) + \mu(R - P_0)$$

لكن النقطة S المعرفة بهذه العلاقة ليست بطبيعة الحال سوى:

$$S = \lambda Q + \mu R + (1 - \lambda - \mu) P_0$$

ولذلك أصبح الأمر متعلقاً باثبات (بعد تغيير الرموز) أن مهما كانت P، Q، R في V والأعداد السلمية λ، μ، ν في K بحيث:

$$\lambda + \mu + \nu = 1 \tag{11}$$

فإن:

$$\lambda P + \mu Q + \nu R \in V$$

إلاّ أن مميزة K تخالف 2، ولذا فإن $2 \neq 0$ ومنه $3 \neq 1$ في K؛ وبالتالي لا

يمكن أن نحصل على : $\lambda = \mu = \nu = 1$ ؛ وعليه نستطيع أن نفرض مثلاً $\lambda \neq 1$. يصبح $1 - \lambda$ في هذه الحالة عنصراً قابلاً للقلب . وبالتالي يسمح الدستور (10) من الفقرة 4 بكتابة :

$$\lambda P + \mu Q + \nu S = \lambda P + (1 - \lambda) M$$

حيث :

$$M = \frac{\mu}{1 - \lambda} Q + \frac{\nu}{1 - \lambda} R$$

إذا كان $Q = R$ فإن $M = Q = R$ ويكون M في V ؛ أما إذا كان $Q \neq R$ فإن النقطة M تقع على المستقيم الواصل بين Q وَ R . ولذا نستنتج من الفرض أن M تنتمي إلى V . وهكذا أثبتنا أن $M \in V$ في جميع الحالات . نستطيع بعد هذا اتباع الخطوات السابقة ونبين أن V يحتوي أيضاً على النقطة : $\lambda P + (1 - \lambda) M$ ، وبذلك ينتهي البرهان .

من الواضح أن نتيجة النظرية 2 تصير غير صحيحة لو كان K هو حقل الأعداد الطبيعية وفق 2 ، لأن لو كان الأمر غير ذلك لأصبح كل جزء كيفي من E عاجزاً عن إحتواء المستقيم الواصل بين نقطتين P وَ Q ؛ حيث P و Q نقطتان مختلفتان من الجزء المعتبر : ذلك أن هذا المستقيم يتكون (المثال 11) من النقطتين P وَ Q لا غير .

6. الفضاءات التآلفية ذات الأبعاد المنتهية . الأسس التآلفية .

ليكن T فضاء شعاعياً على حقل K وَ E فضاء تآلفياً ملحقاً بِـ T ؛ نقول عن E إنه من بعد منته إذا كان T كذلك ؛ وعندئذ نعرّف **بعد** E (على حقل الأساس K) على أنه العدد :

$$\dim(E) = \dim(T)$$

نفرض أن E ذو بعد منته يساوي n . نختار أساساً $(a_1, ..., a_n)$ لِـ T . ونقطة P_0 من E ، ثم نضع :

$$P_i = a_i + P_0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

من أجل كل P في E ، توجد جملة وحيدة من الأعداد السلمية $\xi_1, ..., \xi_n$ المنتمية لـ K بحيث :

$$P - P_0 = \xi_1 a_1 + ... + \xi_n a_n$$

بوضع :

$$\xi_0 = 1 - \xi_1 - ... - \xi_n$$

يتضح أن العلاقة السابقة تكتب أيضاً على النحو :

$$P = \xi_0 P_0 + \xi_1 P_1 + ... + \xi_n P_n \qquad (12)$$

ومنه نرى مباشرة أن مهما كان P في E ، توجد جملة وحيدة من الأعداد السلمية $\xi_0, ..., \xi_n$ التي تحقق (12) وَ :

$$\xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_n = 1 \qquad (13)$$

بخصوص القضية العكسية نلاحظ أنه لكي تتحقق هذه الخاصية يجب أن تشكل الأشعة $a_i = P_i - P_0$ $(1 \leq i \leq n)$ أساساً لـ T .

عندما نكون في الوضع الذي أوضحناه آنفاً، نقول عن الجماعة $(P_0, ..., P_n)$ إنها تشكل **أساساً تآلفياً** لـ E ، كما تسمى الأعداد السلمية ξ_i التي تحقق (12) وَ (13) **الإحداثيات التآلفية** للنقطة P بالنسبة للأساس التآلفي المعتبر.

مثال 13 - ليكن E الفضاء المعتاد في الهندسة الأولية، عندئذ يصبح كل أساس تآلفي عبارة عن جملة من أربع نقاط (A, B, C, D) غير واقعة في نفس المستوى. أي أن هذه النقاط تمثل رؤوس رباعي وجوه حقيقي. أما الإحداثيات التآلفية لنقطة P من E فهي الأعداد x, y, z, t التي تحقق :

$$P = xA + yB + zC + tD$$
$$x + y + z + t = 1$$

من الواضح أن لدينا في هذه الحالة :

$$\overrightarrow{AP} = y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

أي أن y, z, t تمثل مركبات الشعاع $\overrightarrow{AP}$ بالنسبة لجملة الأشعة الثلاثة المستقلة خطياً : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ، والتي تشكل أساساً للفضاء الشعاعي E_A .

ملاحظة 5 – لتكن V منوعة خطية غير خالية في E ؛ رأينا (الملاحظة 2) أنه باستطاعتنا النظر لِـ V كفضاء تآلفي ملحق بفضائه الجزئي التوجيهي H . نعرف **بعد المنوعة الخطية** V إذن، على أنه يساوي بعد H . إذا كانت V مولدة عن النقاط $P_0, ..., P_n$ ، تبين الملاحظة 3 أن بعد V يساوي مرتبة جماعة الأشعة $P_i - P_0$ $(1 \le i \le n)$.

إذا كانت كل من V وَ W منوعة خطية في E بحيث $V \subset W$ ، فإن $\dim(V) \le \dim(W)$ ولا يمكننا الحصول على المساواة $\dim(V) = \dim(W)$ إلا إذا كان $V = W$. نترك للقارئ مهمة إثبات هذه النتيجة ضمن التمارين .

ليكن E فضاء تآلفياً ملحقاً بفضاء شعاعي T بعده منته ؛ كنا قد رأينا سابقاً أن النقاط $P_0, ..., P_n$ من E تشكل أساساً تآلفياً لِـ E إذا وفقط إذا كانت الأشعة $P_i - P_0$ $(1 \le i \le n)$ تشكل أساساً لِـ T . نستنتج بطبيعة الحال أن كل الأسس التآلفية لِـ E تحتوي على نفس عدد النقاط وهذا العدد هو $n + 1$ حيث $n = \dim(E)$.

من جهة أخرى لكي تشكل الأشعة $P_i - P_0$ ، البالغ عددها $n = \dim(E)$ ، أساساً لِـ T يجب ويكفي (النظرية 10 ، ف 19) أن تولد T ؛ وهذا يعني بطبيعة الحال أن كل نقطة P من E تكتب على الأقل بطريقة واحدة، على النحو :

$$P = \sum_{0 \le i \le n} \xi_i \, P_i$$

حيث $\sum_{0 \le i \le n} \xi_i = 1$.

بعبارة أخرى فإن المنوعة الخطية المولدة عن النقاط P_i هي E بأكمله ؛ ولما كانت هذه المنوعة أصغر المنوعات التي تحتوي على النقاط P_i ؛ فإننا نستنتج النظرية التالية :

نظرية 3 – ليكن E فضاء تآلفياً على حقل K ، بعده n . لكي تشكل $n + 1$

نقطة من G أساساً تآلفياً لِـ E يجب ويكفي ألاّ تكون هذه النقاط محتواة في أية منوعة خطية تخالف E .

فمثلاً . لكي تشكل أربع نقاط أساساً تآلفياً للفضاء المعتاد يلزم ويكفي ألاّ تقع هذه النقاط في نفس المستوى .

ملاحظة 6 - لتكن $Q_0, ..., Q_m$ نقاطاً في E . نقول عنها إنها **مستقلة** عندما تشكل أساساً للمنوعة الخطية V التي تولدها ، أي إذا استطعنا كتابة كل نقطة P من E . على الأكثر بطريقة واحدة ، على النحو :

$$P = \sum_{0 \leq j \leq m} \xi_j \, Q_j$$

حيث $\sum_{0 \leq j \leq m} \xi_j = 1$.

ويرجع ذلك إلى القول بأن الأشعة $Q_j - Q_0$ $(1 \leq j \leq m)$ مستقلة خطياً في T .

إذا اعتبرنا مثلاً ثلاث نقاط في الفضاء المعتاد وجدنا أنها تكون مستقلة إذا وفقط إذا لم تقع كلها على نفس المستقيم ، أي عندما تولد مستوياً بالفعل .

7. حساب بعد منوعة خطية

تتطلب الناحية العملية في معظم الأحيان حساب بعد منوعة خطية مولدة عن نقاط منتمية لفضاء تآلفي .

نستعمل في هذه الحالة النتيجة التالية :

نظرية 4 - ليكن E فضاء تآلفياً على حقل وَ $(P_0, ..., P_n)$ أساساً تآلفياً لِـ E . وَ :

$$Q_i = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} \, P_j \qquad (0 \leq i \leq m)$$

نقاطاً من E . ليكن r بعد المنوعة الخطية المولدة عن $Q_0, \ldots, Q_m$. حينئذ تكون مرتبة المصفوفة :

$$A = (\alpha_{ij})_{0 \le i \le m,\, 0 \le j \le n}$$

مساوية لـ $r + 1$.

بالاستناد إلى الملاحظة 5، نلاحظ أن البعد المطلوب r يساوي مرتبة جماعة الأشعة $Q_i - Q_0$. إلاّ أن لدينا :

$$Q_i - Q_0 = (Q_i - P_0) - (Q_0 - P_0) = \sum_j \alpha_{ij}(P_j - P_0) - \sum_j \alpha_{0j}(P_j - P_0)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} (\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) \cdot a_j$$

حيث تشكل الأشعة $a_j = P_j - P_0 \ (1 \le j \le n)$ أساساً لـ T . وبالتالي (النظرية 15، ف 19) فإن العدد r يساوي مرتبة المصفوفة :

$$A' = (\alpha_{ij} - \alpha_{0j})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$$

يبقى إذن أن نبين بأن مرتبة المصفوفة A تتجاوز مرتبة A' بوحدة وذلك باستعمال العلاقات :

$$\sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} = 1 \qquad (0 \le i \le m) \tag{14}$$

التي تربط مختلف الإحداثيات التآلفية للنقاط Q_i .

من أجل ذلك نعتبر من جهة جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$\sum_{i=1}^{i=m} \xi_i\, \alpha_{ij} = 0 \qquad (0 \le j \le n) \tag{15}$$

ومن جهة أخرى الجملة :

$$\sum_{i=0}^{i=n} \eta_i(\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) = 0 \tag{16}$$

أما حلول الجملة الأولى فهي تشكل فضاء جزئياً M من K^{n+1} ، وأما

حلول الجملة الثانية فتشكل فضاء جزئياً N من K^n ؛ لما كانت مرتبة المصفوفة A' تساوي r فإن لدينا :

$$\dim(N) = n - r$$

حسب النظرية 17 . ف 19 . لنرمز مؤقتاً بـ s لمرتبة A ، نرى حينئذ بنفس الطريقة أن :

$$\dim(M) = n + 1 - s$$

للبرهان على المساواة $s = r + 1$ يكفي إذن أن نبين بأن M وَ N من نفس البعد . أي أنهما متشاكلان .

إذا جمعنا المعادلات (15) طرفاً طرفاً وراعينا العلاقات (14) ، حصلنا على $\xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n = 0$ بحيث أن (15) تقتضي :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \alpha_{ij} - (\xi_1 + \dots + \xi_n)\alpha_{0j} = 0$$

أي أن :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(\alpha_{ij} - \alpha_{0j}) = 0$$

نحصل إذن على تطبيق u من M في N بوضع :

$$u(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

بنفس الطريقة نبين أنه بالإمكان إنشاء تطبيق v من N في M بوضع :

$$v(\eta_1, \dots, \eta_n) = (-\eta_1 - \dots - \eta_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

بعد هذا كله يتضح أن u وَ v تماثلان متعاكسان الأول من M في N والثاني من N في M أي أنهما تشاكلان من M في N . ومن N في M ، وبذلك ينتهي برهان النظرية .

ملاحظة 7 - لا تتغير مرتبة المصفوفة A إذا أضفنا للسطر الأول من A مجموع السطور الأخرى . أي إذا استبدلنا السطر الأول من A بـ$(1, 1, \dots, 1)$.

ولذا يمكننا طرح العمود الأول للمصفوفة التي نحصل عليها بهذه الطريقة، من الأعمدة الموالية ؛ فنحصل حينئذ على مصفوفة مرتبتها تساوي مرتبة A . وسطرها الأول هو $(1, 0, ..., 0)$. أما حدودها الواقعة تحت السطر الأول وعلى يمين العمود الأول فهي حدود المصفوفة A' ؛ ومنه نستخلص برهاناً أخيراً على المساواة : $rg(A) = 1 + rg(A')$.

8. معادلات منوعة خطية ضمن الإحداثيات التآلفية .

ليكن E فضاء تآلفياً بعده منته n ، على حقل تبديلي K و $(P_0, ..., P_n)$ أساساً تآلفياً لـ E . نعتبر r نقطة مستقلة :

$$Q_i = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} P_j \qquad (1 \leq i \leq r)$$

في E ولتكن V المنوعة الخطية التي بعدها $r - 1$ ، والتي تولدها هذه النقاط . لتكن :

$$P = \sum \xi_j P_j$$

نقطة من E . حتى تنتمي P إلى V يلزم ويكفي أن يكون بعد المنوعة الخطية W المولدة عن $P, Q_1, ..., Q_r$ يساوي $r - 1$ ؛ لرؤية ذلك نلاحظ أنه إذا كانت P في V فإن $W = V$ ، ومنه يأتي لزوم الشرط ؛ بخصوص كفاية الشرط نفرض أنه محقق ؛ لما كان $V \subset W$ فإن العلاقة $\dim(V) = \dim(W)$ تستلزم $V = W$ وبالتالي يتضح أن P تنتمي إلى V .

للتعبير على إنتماء P إلى V ، يكفي إذن حسب النظرية 4 ، أن نكتب بأن مرتبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \alpha_{10} & \dots & \alpha_{r0} \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$$

تساوي r ، أي أن كل معين رتبته $s > r$ مستخرج من هذه المصفوفة منعدم حتماً (راجع الملاحظة 5 في الفقرة 8 من ف 23) ذلك أن K تبديلي ؛ وعليه يكفي التعبير عن هذا الشرط من أجل $s = r + 1$.

عند التعبير عن الشرط المشار إليه أعلاه من أجل $s = r + 1$ ، نرى أنه لابد من إيجاد:

$$\begin{vmatrix} \xi_{i_0} & \alpha_{1i_0} & \dots & \alpha_{ri_0} \\ \xi_{i_1} & \alpha_{1i_1} & \dots & \alpha_{ri_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i_r} & \alpha_{1i_r} & \dots & \alpha_{ri_r} \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

وذلك من أجل $0 \le i_0 < i_1 < \dots < i_r \le n$.

تسمى هذه العلاقات التي تميز النقاط P من V ، **معادلات المنوعة الخطية** V بالنسبة للأساس التآلفي المعتبر.

إن أبسط حالة في هذا الموضوع هي تلك التي يكون فيها $r = n$ ، بحيث يكون بعد V مساوياً لـ $n - 1$ (نقول عندئذ أن V **مستو مصعد في الفضاء** التآلفي E) ؛ تنحصر العلاقات (17) في هذه الحالة، ضمن المعادلة الوحيدة:

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \alpha_{10} & \dots & \alpha_{n0} \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

وبما أننا لا نغير قيمة هذا المعين عندما نضيف إلى السطر الأول مجموع الأسطر الباقية (الخاصية (ر) في الفقرة ١ من ف 24) وبما أن مجموع الإحداثيات التآلفية لنقطة يساوي دوماً ١. نرى أننا نستطيع استبدال العلاقة السابقة بالمعادلة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n & \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

نقول عن (18) إنها معادلة المستوى المصعد المولد عن النقاط (المستقلة) $Q_1, \dots, Q_n$.

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية بن عكنون ـ الجزائر

دروس في الجبر
المجلد الاول والثاني

الثمن 416,00 دج

Codification : 1 . 01 . 759